

①

$$x = t + \frac{1}{3t} \quad \left(0 < t \leq \frac{1}{2} \right) \quad \text{について}$$

$$(1) \quad f(t) = t + \frac{1}{3t} \quad \text{とおくと,}$$

$$f'(t) = \frac{3t^2 - 1}{3t^2}$$

また, $\lim_{t \rightarrow +0} f(t) = \infty$ であるから, $0 < t \leq \frac{1}{2}$ における

関数 $f(t)$ の増減は右のようになる。

以上より, $f(t) \geq \frac{7}{6}$ であるから,

$$x \geq \frac{7}{6} \quad \dots \text{答}$$

$$(2) \quad g(x) = x^2 + ax + b \quad \text{とおくと,}$$

$$g(x) = \left(x + \frac{a}{2} \right)^2 + b - \frac{1}{4}a^2$$

よって $y = g(x)$ のグラフが x 軸と $x \geq \frac{7}{6}$ の範囲で共有点を

持つための条件を考える。

$$(i) \quad -\frac{a}{2} < \frac{7}{6} \quad \text{のとき,}$$

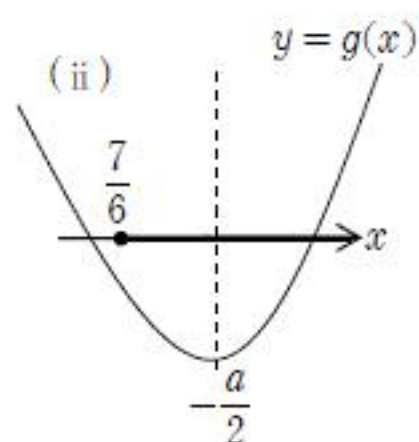
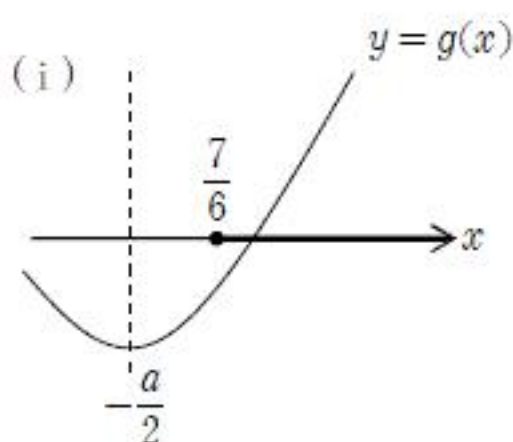
$$g\left(\frac{7}{6}\right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow b \leq -\frac{7}{6}a - \frac{49}{36}$$

$$(ii) \quad \frac{7}{6} \leq -\frac{a}{2} \quad \text{のとき,}$$

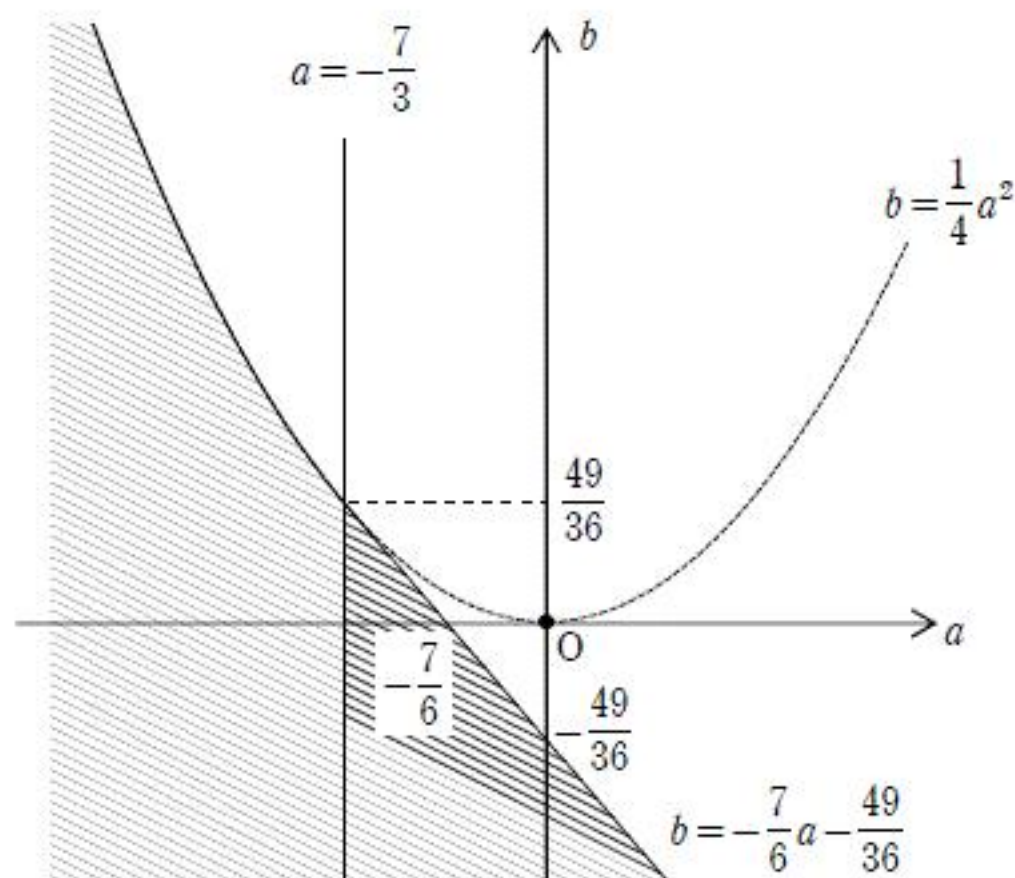
$$g\left(-\frac{a}{2}\right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow b \leq \frac{1}{4}a^2$$



以上より点 (a, b) の存在範囲は, 下の図の斜線部分となる。

(境界はすべて含む)



②

(1) $\overline{ON} = \overline{OD} + t\overline{DG}$ $\left(0 < t < \frac{1}{2}\right)$ と表せるから,

$$\overline{ON} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3t \\ \sqrt{6} \end{pmatrix}$$

よって, $\overline{MN} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3t - \frac{3}{2} \\ \sqrt{6} \end{pmatrix}$ と表せる.

従って,

$$|\overline{MN}|^2 = (-3)^2 + \left(3t - \frac{3}{2}\right)^2 + (\sqrt{6})^2 = 9t^2 - 9t + \frac{69}{4}$$

から,

$$|\overline{MN}|^2 = 4^2 \Leftrightarrow 36t^2 - 36t + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (6t - 1)(6t - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{6}, \frac{5}{6}$$

$0 < t < \frac{1}{2}$ から, $t = \frac{1}{6}$

よって, $\overline{ON} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ \sqrt{6} \end{pmatrix}$ となり, $N\left(-1, \frac{1}{2}, \sqrt{6}\right)$ …答

(2) 平面 EMN 上の点 P は,

$$\overline{EP} = \alpha \overline{EM} + \beta \overline{EN}$$

と表せる. 従って,

$$\begin{aligned} \overline{OP} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ -\sqrt{6} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \alpha - 2\beta \\ \frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta \\ \sqrt{6} - \sqrt{6}\alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

点 P は y 軸上の点なので,

$$1 + \alpha - 2\beta = \sqrt{6} - \sqrt{6}\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \beta = 1$$

よって,

$$\overline{OP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるので,

$$P(0, 2, 0) \text{ …答}$$

(3) 四角形 EMPN の面積であり,

$$\overline{MP} = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \overline{EN}, \quad \overline{NP} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\sqrt{6} \end{pmatrix} = \overline{EM}$$

なので, 四角形 EMPN は平行四辺形である.

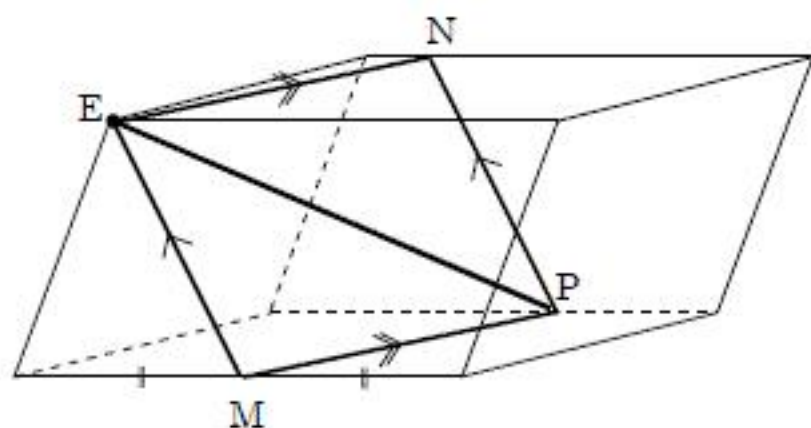
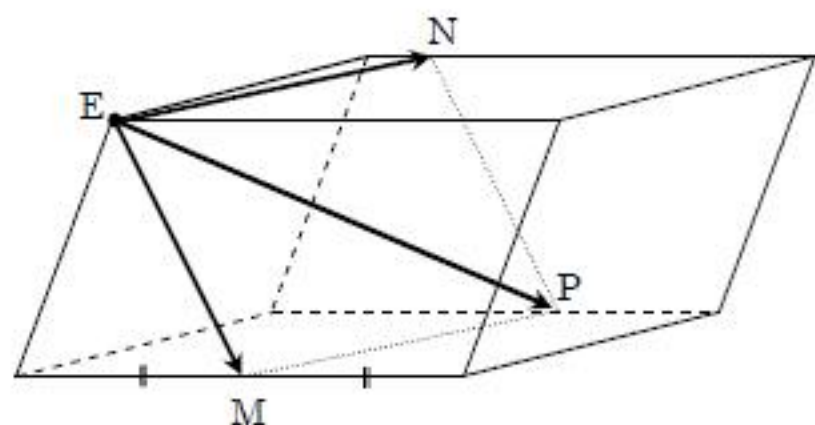
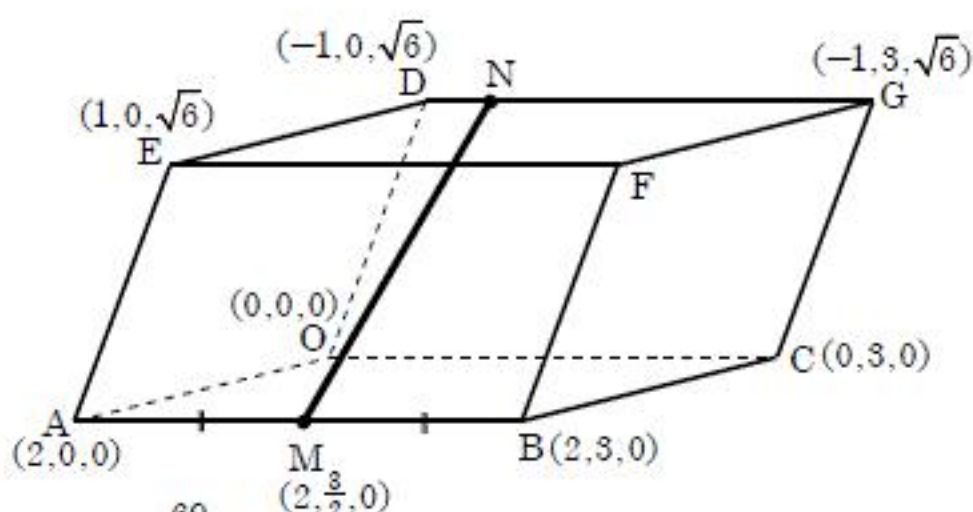
よって, 求める面積は,

$$2 \triangle EMP$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{|\overline{EM}|^2 |\overline{EP}|^2 - (\overline{EM} \cdot \overline{EP})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{37}{4} \cdot 11 - (-1 + 3 + 6)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{151}}{2} \text{ …答}$$



[3]

10 個の玉全てに区別を付けて数える。

(1) 異なる 10 個の玉から 2 個の玉を取り出す方法は、

$${}_{10}C_2 = 45 \quad (\text{通り})$$

この中で、2 つの数字の積が 10 となるのは、2 数が 2 と 5 の場合であり、

$$2 \cdot 2 = 4 \quad (\text{通り})$$

以上より求める確率は、

$$\frac{4}{45} \quad \cdots \text{答}$$

(2) 異なる 10 個の玉から 4 個の玉を取り出す方法は、

$${}_{10}C_4 = 210 \quad (\text{通り})$$

この中で、2 つの数字の積が 100 となるのは、 $100 = 2^2 \cdot 5^2$ の形から、

4 数が 2, 2, 5, 5 または 1, 4, 5, 5 の場合である。

それぞれ取り出し方は、1 通り、4 通りだから、求める確率は、

$$\frac{1+4}{210} = \frac{1}{42} \quad \cdots \text{答}$$

(3) 異なる 10 個の玉から 6 個の玉を順番に取り出す方法は、

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \quad (\text{通り})$$

この中で、条件を満たすものは、

残った 4 数の積が平方数である

ことが必要であり、次の 2 パターンが考えられる。

(i) 残った 4 数が m, m, n, n の形 (m, n は異なる自然数)

(ii) 残った 4 数が m, m, n, l の形 (m, n, l は全て異なる自然数で、 nl が平方数)

(i) のとき、 m, n の選び方は ${}_5C_2 = 10$ (通り) あり、それぞれについて取り出した数を

a, a, b, b, c, c (a, b, c は全て異なる自然数) としたとき、これらを 3 つの数と 3 つの数の 2 組に分けて

その積が等しくなるようなわけ方は、

1 個目から 3 個目が a と b と c

4 個目から 6 個目が a と b と c

となるものだから、順番も考慮することで、

$$(3! \times 2 \times 2 \times 2) \times (3! \times 1 \times 1 \times 1) = 288 \quad (\text{通り})$$

以上より、

$$10 \times 288 = 2880 \quad (\text{通り})$$

(ii) のとき、

nl が平方数となるような n, l の組は、1 と 4 の組み合わせのみ。

よって、 m の選び方は 1 と 4 を除いた 3 通りで、

(ア) 2, 2, 1, 4

(イ) 3, 3, 1, 4

(ウ) 5, 5, 1, 4

の 3 通りのみ考えられる。それぞれについて取り出した 6 個の数は、

(ア) 1, 4, 3, 3, 5, 5 (6 数の積は 30^2)

(イ) 1, 4, 2, 2, 5, 5 (6 数の積は 20^2)

(ウ) 1, 4, 2, 2, 3, 3 (6 数の積は 12^2)

となる。これらを 3 つの数と 3 つの数の 2 組に分けてその積が等しくなるように分ける方法は、

(ア) の場合、3 数で 30 が作れないので不可能。

(イ) の場合、 $1 \times 4 \times 5 = 2 \times 2 \times 5 = 20$ のみ。

(ウ) の場合、 $1 \times 3 \times 4 = 2 \times 2 \times 3 = 12$ のみ。

よって、

(イ) の場合は、

$$2 \times (3! \times 2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 2 \times 1 \times 1) = 576 \quad (\text{通り})$$

(ウ) の場合も同様。

以上から求める確率は、

$$\frac{2880 + 576 \times 2}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{2}{75} \quad \cdots \text{答}$$

[4]

行列 A による変換を f とする。

条件より、2点 $(1, 0)$, $(2, 0)$ の f による像は共に領域 D に含まれる必要がある。よって、

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \end{pmatrix}$$

から、

$$1 \leq a^2 + b^2 \leq 4 \quad \text{かつ} \quad 1 \leq (2a)^2 + (2b)^2 \leq 4$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$$

が必要。このとき、

$$a = \cos \theta, \quad b = \sin \theta$$

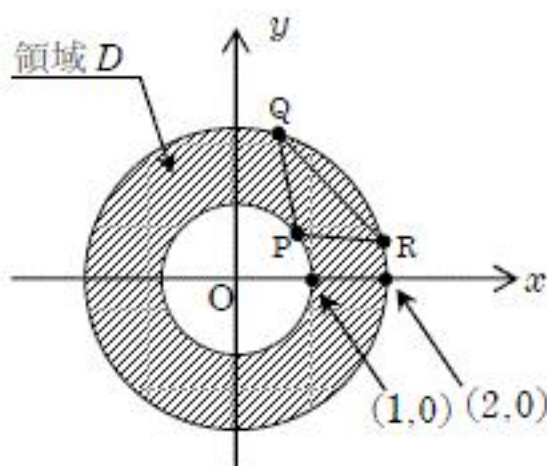
と表せるから、

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

となり、これは平面上の任意の点を原点 O に関して角 θ 回転させる回転変換を与える行列である。

領域 D は原点に関する任意の回転に関して不変であるから、領域 D に含まれる任意の三角形 PQR の f による像は領域 D に含まれる。以上より、求める必要十分条件は、

$$a^2 + b^2 = 1 \quad \cdots \text{答}$$



$$I_n = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos((2n+1)x)}{\sin x} dx \text{ について}$$

$$(1) \quad I_0 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$= \left[\log |\sin x| \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \log 1 - \log \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \log 2 \quad \cdots \text{答}$$

$$(2) \quad I_n - I_{n-1}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{\cos((2n+1)x)}{\sin x} - \frac{\cos((2n-1)x)}{\sin x} \right\} dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{\cos(2nx+x)}{\sin x} - \frac{\cos(2nx-x)}{\sin x} \right\} dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2nx \cos x - \sin 2nx \sin x - (\cos 2nx \cos x + \sin 2nx \sin x)}{\sin x} dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-2 \sin 2nx \sin x}{\sin x} dx$$

$$= -2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2nx dx$$

$$= -2 \left[-\frac{1}{2n} \cos 2nx \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{n} \left(\cos n\pi - \cos \frac{n}{2}\pi \right)$$

$$= \frac{1}{n} \left\{ (-1)^n - \cos \frac{n}{2}\pi \right\} \quad \cdots \text{答}$$

$$(3) \quad I_5 = \sum_{k=1}^5 (I_k - I_{k-1}) + I_0$$

$$= \sum_{k=1}^5 \frac{1}{k} \left\{ (-1)^k - \cos \frac{k}{2}\pi \right\} + \frac{1}{2} \log 2$$

$$= \frac{1}{1} \{ (-1)^1 - 0 \} + \frac{1}{2} \{ (-1)^2 + 1 \} + \frac{1}{3} \{ (-1)^3 - 0 \} + \frac{1}{4} \{ (-1)^4 - 1 \} + \frac{1}{5} \{ (-1)^5 - 0 \} + \frac{1}{2} \log 2$$

$$= -1 + 1 - \frac{1}{3} + 0 - \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \log 2$$

$$= -\frac{8}{15} + \frac{1}{2} \log 2 \quad \cdots \text{答}$$