

①

$$(1) \quad a_n^2 - 2a_n a_{n+1} + a_{n+1}^2 = 3(a_n + a_{n+1}) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$a_{n+1}^2 - 2a_{n+1} a_{n+2} + a_{n+2}^2 = 3(a_{n+1} + a_{n+2}) \quad \cdots \textcircled{2}$$

について、②-①の計算より、

$$a_{n+2}^2 - a_n^2 - 2a_{n+1}a_{n+2} + 2a_{n+1}a_n = 3a_{n+2} - 3a_n$$

$$\Leftrightarrow (a_{n+2} - a_n)(a_{n+2} + a_n - 2a_{n+1} - 3) = 0$$

ここで $a_{n+1} > a_n$, $a_{n+2} > a_{n+1}$ より $a_{n+2} > a_n$ だから $a_{n+2} - a_n \neq 0$

よって、

$$a_{n+2} + a_n - 2a_{n+1} - 3 = 0$$

従って、

$$a_n + a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3 \quad \cdots \text{答} \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$(2) \quad \textcircled{3} \text{より } a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n + 3$$

ここで $a_{n+1} - a_n = b_n$ とすると、

$$b_{n+1} = b_n + 3$$

よって数列 $\{b_n\}$ は公差 3 の等差数列であるので、

$$b_n = b_1 + 3(n-1)$$

$$= a_2 - a_1 + 3n - 3$$

ここで①で $n=1$ とすると、

$$a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2 = 3(a_1 + a_2)$$

$$\Leftrightarrow a_2^2 - 9a_2 = 0$$

$a_2 > a_1 = 3$ より $a_2 = 9$ であるから、

$$b_n = 9 - 3 + 3n - 3$$

$$= 3n + 3 \quad \cdots \text{答}$$

$$(3) \quad a_{n+1} - a_n = 3n + 3 \text{ より } n \geq 2 \text{ で、}$$

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (3k + 3)$$

$$= 3 + \frac{(n-1)\{6 + 3(n-1) + 3\}}{2}$$

$$= \frac{3}{2}n(n+1) \quad (\text{これは } n=1 \text{ でも成立する}) \quad \cdots \text{答}$$

②

(1) 三角形 ABP が鋭角三角形となるための条件は、

$\angle PAB$ が鋭角 …①

$\angle PBA$ が鋭角 …②

$\angle APB$ が鋭角 …③

の 3 つが同時に成立すること。

そこで 3 点 A, B, C と

$$\text{円 } C: x^2 + y^2 = 4$$

を考えると、

①が成立するための条件は

$$-2 < t \text{ (これは } t > 0 \text{ のとき成立している)}$$

②が成立するための条件は

$$t < 2$$

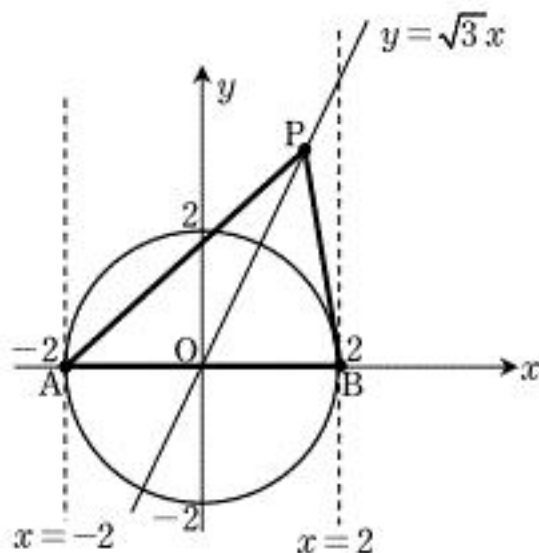
③が成立するための条件は

点 P が円 C の外部にあること

だから、

$$t > 0 \quad \text{かつ} \quad t < 2 \quad \text{かつ} \quad t^2 + (\sqrt{3}t)^2 > 4$$

より $1 < t < 2$ …答



(2) 三角形 ABP の垂心を H とするとき、H は、

点 P を通り、辺 AB に垂直な直線 l

点 B を通り、辺 AP に垂直な直線 m

の交点である。

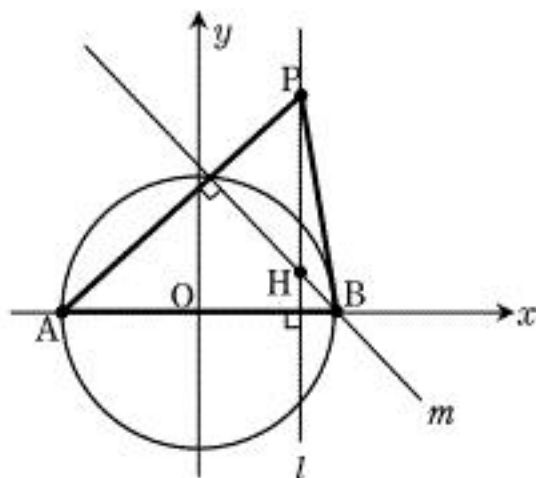
l の方程式は、 $x = t$

直線 AP の傾きは $\frac{\sqrt{3}t}{t+2}$ だから、

$$m \text{ の方程式は、 } y = -\frac{t+2}{\sqrt{3}t}(x-2)$$

l, m の交点を求めることで、求める垂心の座標は、

$$H\left(t, \frac{4-t^2}{\sqrt{3}t}\right) \quad \text{…答}$$



(3) 点 P を線分 RQ で折り曲げた場合、点 P は、点 P を通り線分 RQ に垂直な平面上にある。

今、条件より $RQ < AB$ (中点連結定理より) だから、

点 P は、点 P を通り辺 AB に垂直な平面上にある。

2 点 A, B についても同様に考えると、四面体を作った場合に

3 点 P, A, B は、三角形 ABP の垂心 H を通り $\triangle MQR$ に

垂直な直線上にあることがわかる。そこで、z 軸追加した

xyz 空間を考えると、3 点 P, A, B が交わる点を T として、

$$T\left(t, \frac{4-t^2}{\sqrt{3}t}, z\right) \quad (z > 0)$$

と表せる。TM = 2 だから、

$$t^2 + \left(\frac{4-t^2}{\sqrt{3}t}\right)^2 + z^2 = 2^2 \quad \text{つまり、} \quad z^2 = \frac{4(4-t^2)(t^2-1)}{3t^2}$$

$1 < t < 2$ より $1 < t^2 < 4$ だからこの右辺は正であり、

$$z = \frac{2\sqrt{(4-t^2)(t^2-1)}}{\sqrt{3}t}$$

さて、 $\triangle MQR = \frac{1}{4} \triangle ABP$ であり、

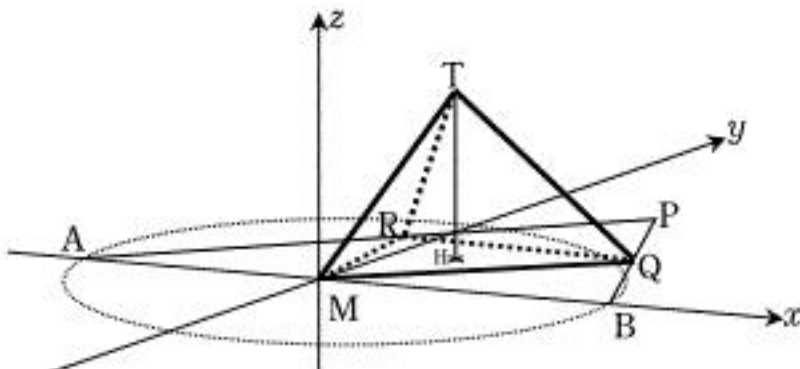
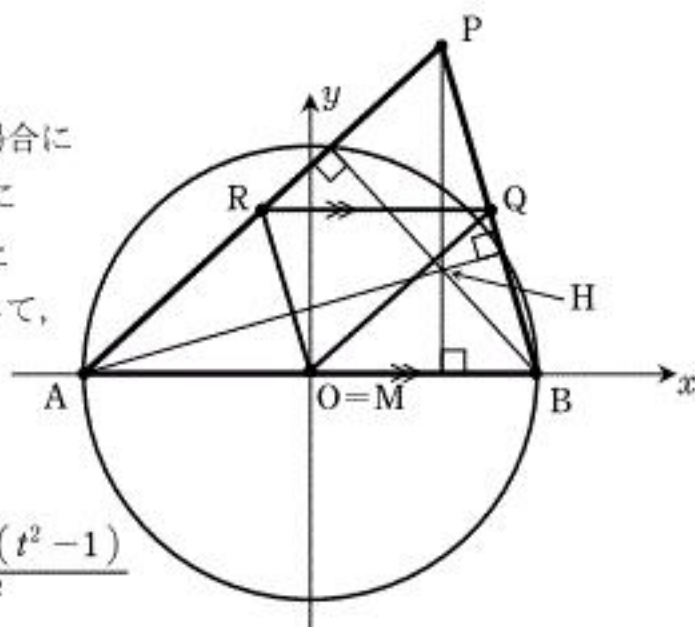
$$\triangle ABP = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{3}t = 2\sqrt{3}t$$

だから、 $\triangle MQR = \frac{\sqrt{3}t}{2}$

よって四面体 TMQR の体積を V とすると、

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \triangle MQR \cdot TH \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}t}{2} \cdot \frac{2\sqrt{(4-t^2)(t^2-1)}}{\sqrt{3}t} \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{\frac{9}{4} - \left(t^2 - \frac{5}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

これは $t^2 = \frac{5}{2}$ つまり $t = \frac{\sqrt{10}}{2}$ で最大となり、最大値は $\frac{1}{3} \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1}{2}$ …答



③

サイコロを3回投げて出た目の数の組は全部で

$$6^3 = 216 \text{ (通り)}$$

あり、すべて同様に確からしい。

(1) 方程式(*)の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} D &= p_2^2 - 4 \cdot 2 p_1 \cdot 2 p_3 \\ &= p_2^2 - 16 p_1 p_3 \end{aligned}$$

よって(*)が実数解をもつための条件は、 $D \geq 0$ 、つまり、

$$p_2^2 \geq 16 p_1 p_3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

ここで p_1, p_2, p_3 はすべて1以上6以下の整数であるから、

$$16 p_1 p_3 \geq 16$$

よって、

$$p_2^2 \geq 16$$

から $4 \leq p_2 \leq 6$ である。

(i) $p_2 = 4$ のとき、①は、

$$p_1 p_3 \leq 1$$

よって $(p_1, p_3) = (1, 1)$ のみ。

(ii) $p_2 = 5$ のとき、①は、

$$p_1 p_3 \leq \frac{25}{16} = 1 + \frac{9}{16}$$

よって $(p_1, p_3) = (1, 1)$ のみ。

(iii) $p_2 = 6$ のとき、①は、

$$p_1 p_3 \leq \frac{36}{16} = \frac{9}{4} = 2 + \frac{1}{4}$$

よって $(p_1, p_3) = (1, 1), (1, 2), (2, 1)$ の3組。

以上より求める確率は、

$$\frac{1+1+3}{216} = \frac{5}{216} \quad \cdots \text{答}$$

(2) 方程式(*)が実数でない複素数解 α, β をもつための条件は、 $D < 0$ 、つまり、

$$p_2^2 < 16 p_1 p_3 \quad \cdots \textcircled{2}$$

また $\alpha\beta = 1$ のとき、解と係数の関係より、

$$\frac{p_3}{p_1} = 1$$

つまり、

$$p_1 = p_3$$

このとき②は、

$$p_2^2 < 16 p_1^2$$

よって、

$$0 < p_2 < 4 p_1 \quad \cdots \textcircled{3}$$

(i) $p_1 = 1$ のとき、

③は $0 < p_2 < 4$ となり、これを満たす p_2 は $1 \leq p_2 \leq 3$

(ii) $2 \leq p_1 \leq 6$ のとき、

$4 p_1 \geq 8$ だから③を満たす p_2 は $1 \leq p_2 \leq 6$

以上より求める確率は、

$$\frac{3+5 \cdot 6}{216} = \frac{11}{72} \quad \cdots \text{答}$$

[4]

(1) $f(t) = -4t^3 + (a+3)t$ について、

$$\begin{aligned} f'(t) &= -12t^2 + a + 3 \\ &= -12 \left(t^2 - \frac{a+3}{12} \right) \end{aligned}$$

よって関数 $f(t)$ の増減は右の通り。

(i) $0 < a \leq 9$ のとき、

$$\begin{aligned} M(a) &= f \left(\sqrt{\frac{a+3}{12}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{9} (a+3)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

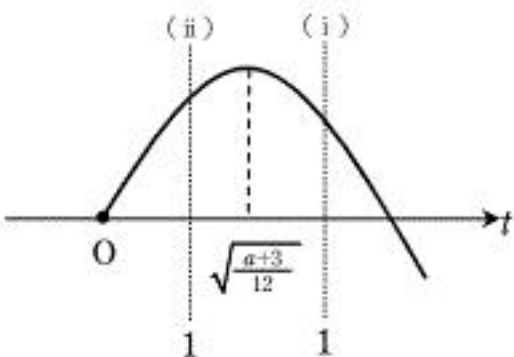
(ii) $9 \leq a$ のとき、

$$\begin{aligned} M(a) &= f(1) \\ &= a - 1 \end{aligned}$$

以上から、

$$M(a) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{9} (a+3)^{\frac{3}{2}} & (0 < a \leq 9) \\ a - 1 & (9 \leq a) \end{cases} \quad \dots \text{答}$$

t	0	...	$\sqrt{\frac{a+3}{12}}$	...
$f'(t)$		+	0	-
$f(t)$	0	↗	極大	↘



(2)

$$g(x) = M(x)^2 = \begin{cases} \frac{1}{27} (x+3)^3 & (0 < x \leq 9) \\ (x-1)^2 & (9 \leq x) \end{cases}$$

について、

(i) $0 < x \leq 9$ のとき、

$$g'(x) = \frac{1}{9} (x+3)^2$$

だから $y = g(x)$ 上の点 $(s, g(s))$ ($0 < s \leq 9$) で接する直線の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= g'(s)(x-s) + g(s) \\ &= \frac{1}{9} (s+3)^2 (x-s) + \frac{1}{27} (s+3)^3 \end{aligned}$$

これが原点を通るとき、

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{9} (s+3)^2 (0-s) + \frac{1}{27} (s+3)^3 \\ \Leftrightarrow (3-2s)(s+3)^2 &= 0 \end{aligned}$$

$0 < s < 9$ だから、

$$s = \frac{3}{2}$$

このとき、接線の傾きは、

$$g' \left(\frac{3}{2} \right) = \frac{1}{9} \left(\frac{3}{2} + 3 \right)^2 = \frac{9}{4}$$

(ii) $9 \leq x$ のとき、

$$g'(x) = 2(x-1)$$

だから $y = g(x)$ 上の点 $(s, g(s))$ ($9 \leq s$) で接する直線の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= g'(s)(x-s) + g(s) \\ &= 2(s-1)(x-s) + (s-1)^2 \end{aligned}$$

これが原点を通るとき、

$$\begin{aligned} 0 &= 2(s-1)(0-s) + (s-1)^2 \\ \Leftrightarrow (s+1)(s-1) &= 0 \end{aligned}$$

$9 \leq s$ だから、不適。

以上より、

$$s = \frac{3}{2}, \text{ 接線の傾きは } \frac{9}{4} \quad \dots \text{答}$$

(3)

$$k = \frac{M(a)}{\sqrt{a}}$$

について、

$$k^2 a = M(a)^2$$

だから、

$$\begin{aligned} y &= k^2 x \\ y &= g(x) (= M(x)^2) \end{aligned}$$

のグラフが共有点を持つような k^2 の範囲を調べる。すると、 $x > 0$ で $y = g(x)$ は下に凸の関数であるから、(2)の結果より、

$$k^2 \geq \frac{9}{4}$$

であればよいことがわかる。 $k > 0$ なので、

$$k \geq \frac{3}{2}$$

よって求める k の最小値は、

$$k = \frac{3}{2} \quad \dots \text{答}$$

