

①

曲線 $C: x^2 + 4y^2 = 1$ ($x > 0, y > 0$)

曲線 C 上の点,

$$P\left(\cos\theta, \frac{1}{2}\sin\theta\right) \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

を考える。

点 P における楕円 C の接線 l の方程式は,

$$l: (\cos\theta)x + 4\left(\frac{1}{2}\sin\theta\right)y = 1$$

よって, 点 P において l と垂直な直線 m の方程式は,

$$m: (-2\sin\theta)(x - \cos\theta) + \cos\theta\left(y - \frac{1}{2}\sin\theta\right) = 0$$

m で $x = 0$ とすると,

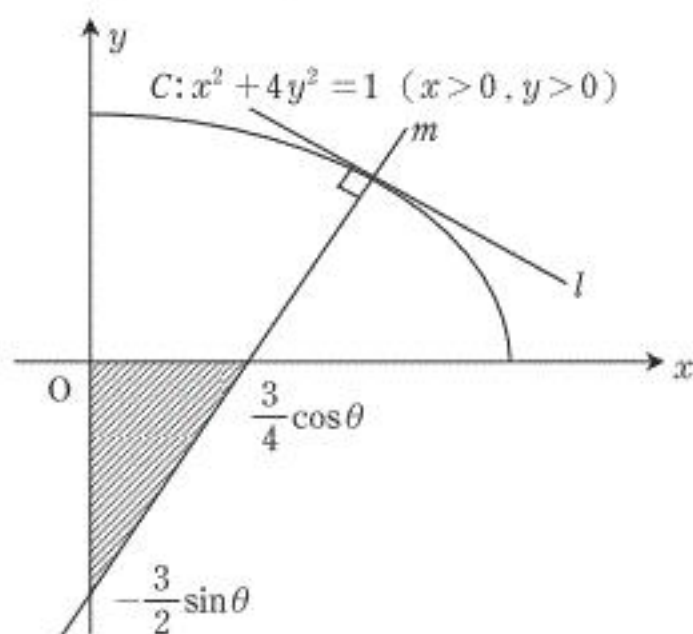
$$y = -\frac{3}{2}\sin\theta$$

$y = 0$ とすると,

$$x = \frac{3}{4}\cos\theta$$

となるから,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\sin\theta \cdot \frac{3}{4}\cos\theta \\ &= \frac{9}{32}\sin 2\theta \\ &\leq \frac{9}{32} \end{aligned}$$



であり, 等号は $2\theta = \frac{\pi}{2}$, つまり $\theta = \frac{\pi}{4}$ のときのみ成立する。

このとき S は最大となり, 最大値は $\frac{9}{32}$ …答

P の座標は $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ …答

②

(1) $f(x)=x^3-x$ とおく。 $f'(x)=3x^2-1$ であり、

このとき、 $y=f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= f'(t)(x-t) + f(t) \\ &= (3t^2-1)(x-t) + t^3 - t \\ &= (3t^2-1)x - 2t^3 \end{aligned}$$

これが点 (X, Y) を通るとき、

$$Y = (3t^2-1)X - 2t^3$$

が成立する。つまり、

$$2t^3 - 3Xt^2 + X + Y = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

を満たす実数 t が存在する。点 (X, Y) から C に引ける接線の本数は、 $\textcircled{1}$ の異なる実数解 t の個数と一致する。

さて、点 $P(X, Y)$ が D に含まれる場合、

$$X^3 - X > Y > -X$$

が成立する。つまり、

$$Y + X > 0 \quad \text{かつ} \quad Y + X - X^3 < 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成立する。このときの $\textcircled{1}$ の実数解の個数を調べる。

$$g(t) = 2t^3 - 3Xt^2 + X + Y$$

とおくとき、 $g'(t) = 6t^2 - 6Xt = 6t(t-X)$ であり、 $\textcircled{2}$ より $X=0$ とすると

$$Y > 0 \quad \text{かつ} \quad Y < 0$$

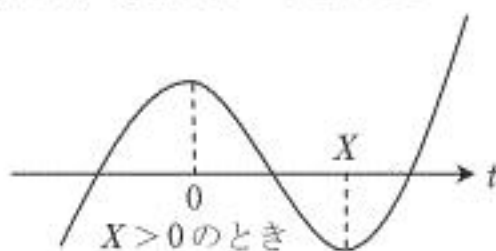
となり不適。よって $X \neq 0$ であり、

$$g(0) = X + Y > 0$$

$$g(X) = Y + X - X^3 < 0$$

となるから $\textcircled{1}$ は異なる 3 つの実数解を持つ。

以上から P を通り C に接する直線は 3 本存在する。 $\cdots$ 証明終わり



(2) $\textcircled{2}$ のとき、 $\textcircled{1}$ は異なる 3 つの実数解を持つ。それらを α, β, γ とすると、

このとき、解と係数の関係より、

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{3X}{2} \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0 \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{X+Y}{2} \quad \cdots \textcircled{5}$$

が成立する。さて、3 本の接線の傾きはそれぞれ

$$3\alpha^2 - 1, \quad 3\beta^2 - 1, \quad 3\gamma^2 - 1$$

だから、

$$(3\alpha^2 - 1) + (3\beta^2 - 1) + (3\gamma^2 - 1) = 3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 3 = 0 \quad \cdots \textcircled{6}$$

$$(3\alpha^2 - 1)(3\beta^2 - 1)(3\gamma^2 - 1) = 0 \quad \cdots \textcircled{7}$$

が成立する。 $\textcircled{6}$ について、

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 1$$

$\textcircled{3}$ 、 $\textcircled{4}$ より

$$\left(\frac{3X}{2}\right)^2 - 2 \cdot 0 = 1$$

よって、 $X > 0$ であることとて、

$$X = \frac{2}{3}$$

$\textcircled{7}$ について、 $3\alpha^2 - 1$ 、 $3\beta^2 - 1$ 、 $3\gamma^2 - 1$ のうち少なくとも 1 つは 0 であるから、それを $3\alpha^2 - 1$ であるとする、

$$\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

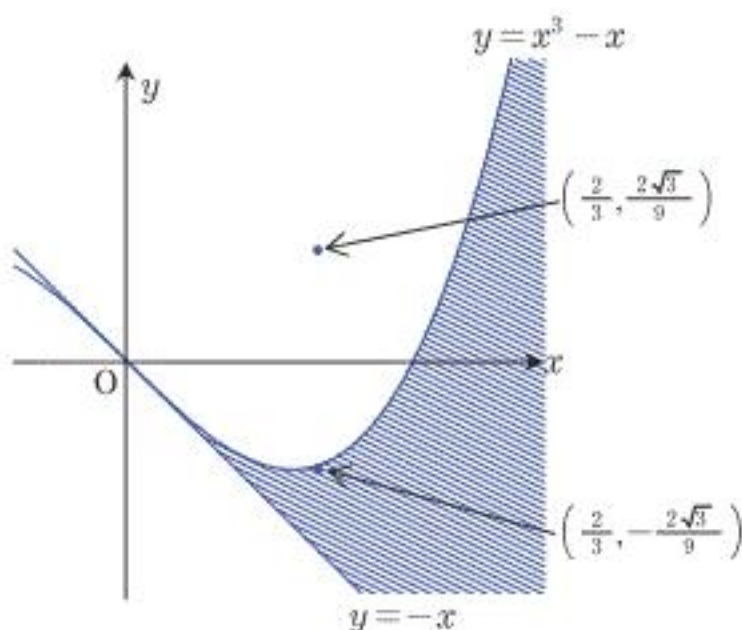
よって $\textcircled{1}$ へ $t = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ を代入すると、

$$Y = \mp \frac{2\sqrt{3}}{9} \quad (\text{複号同順})$$

$X = \frac{2}{3}$ 、 $Y = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ は $\textcircled{2}$ を満たさないから、

求める点 P の座標は、

$$\left(\frac{2}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{9}\right) \quad \cdots \text{答}$$



③

サイコロを 3 回投げて出た目の数の組は全部で

$$6^3 = 216 \text{ (通り)}$$

あり、すべて同様に確からしい。

(1) 方程式(*)の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} D &= p_2^2 - 4 \cdot 2 p_1 \cdot 2 p_3 \\ &= p_2^2 - 16 p_1 p_3 \end{aligned}$$

よって(*)が実数解をもつための条件は、 $D \geq 0$ 、つまり、

$$p_2^2 \geq 16 p_1 p_3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

ここで p_1, p_2, p_3 はすべて 1 以上 6 以下の整数であるから、

$$16 p_1 p_3 \geq 16$$

よって、

$$p_2^2 \geq 16$$

から $4 \leq p_2 \leq 6$ である。

(i) $p_2 = 4$ のとき、①は、

$$p_1 p_3 \leq 1$$

よって $(p_1, p_3) = (1, 1)$ のみ。

(ii) $p_2 = 5$ のとき、①は、

$$p_1 p_3 \leq \frac{25}{16} = 1 + \frac{9}{16}$$

よって $(p_1, p_3) = (1, 1)$ のみ。

(iii) $p_2 = 6$ のとき、①は、

$$p_1 p_3 \leq \frac{36}{16} = \frac{9}{4} = 2 + \frac{1}{4}$$

よって $(p_1, p_3) = (1, 1), (1, 2), (2, 1)$ の 3 組。

以上より求める確率は、

$$\frac{1+1+3}{216} = \frac{5}{216} \quad \cdots \text{答}$$

(2) 方程式(*)が実数でない複素数解 α, β をもつための条件は、 $D < 0$ 、つまり、

$$p_2^2 < 16 p_1 p_3 \quad \cdots \textcircled{2}$$

また $\alpha\beta = 1$ のとき、解と係数の関係より、

$$\frac{p_3}{p_1} = 1$$

つまり、

$$p_1 = p_3$$

このとき②は、

$$p_2^2 < 16 p_1^2$$

よって、

$$0 < p_2 < 4 p_1 \quad \cdots \textcircled{3}$$

(i) $p_1 = 1$ のとき、

③は $0 < p_2 < 4$ となり、これを満たす p_2 は $1 \leq p_2 \leq 3$

(ii) $2 \leq p_1 \leq 6$ のとき、

$4 p_1 \geq 8$ だから③を満たす p_2 は $1 \leq p_2 \leq 6$

以上より求める確率は、

$$\frac{3+5 \cdot 6}{216} = \frac{11}{72} \quad \cdots \text{答}$$

(3) ② かつ $\frac{p_3}{p_1} < 1$

つまり、

$$p_2^2 < 16 p_1 p_3 \quad \text{かつ} \quad p_3 < p_1 \quad \cdots \textcircled{4}$$

を満たすものを数える。

②は p_1, p_3 について対称だから、④を満たすものと、

$$p_2^2 < 16 p_1 p_3 \quad \text{かつ} \quad p_3 > p_1$$

を満たすものは同数ある。

②を満たすものは(1)より $216 - 5 = 211$ (通り)ある。

さて、

$$p_2^2 < 16 p_1 p_3 \quad \text{かつ} \quad p_3 = p_1$$

を満たすものは(2)より 33(通り)あるので、

④を満たすものは、

$$\frac{211 - 33}{2} = 89$$

以上より求める確率は、

$$\frac{89}{216} \quad \cdots \text{答}$$

[4]

(1) $a > 0$, $n \geq 1$, $2n\pi \leq x \leq (2n+1)\pi$ のとき,

$$0 < (2n\pi)^a \leq x^a \leq \{(2n+1)\pi\}^a$$

が成立するので, $\sin x \geq 0$ であることとて,

$$\frac{\sin x}{\{(2n+1)\pi\}^a} \leq \frac{\sin x}{x^a} \leq \frac{\sin x}{(2n\pi)^a}$$

だから,

$$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin x}{\{(2n+1)\pi\}^a} dx \leq \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin x}{x^a} dx \leq \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin x}{(2n\pi)^a} dx$$

が成立する。

$$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin x dx = [-\cos x]_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} = -(-1) + 1 = 2$$

だから,

$$\text{最左辺} = \frac{2}{\{(2n+1)\pi\}^a}$$

$$\text{最右辺} = \frac{2}{(2n\pi)^a}$$

以上より,

$$\frac{2}{\{(2n+1)\pi\}^a} \leq B_n \leq \frac{2}{(2n\pi)^a} \quad \dots \text{答}$$

$$(2) \quad A_n = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{1}{\left\{\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi\right\}^a} = \frac{\pi}{2\left\{\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi\right\}^a}$$

であり, (1)の結果より,

$$\frac{\pi}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{4n+1}\right)^a \leq \frac{A_n}{B_n} \leq \frac{\pi}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{4n+1}\right)^a$$

が成立する。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{4n+1}\right)^a = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4n+1}\right)^a = 1$$

なので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{4n+1}\right)^a = \frac{\pi}{4}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{4n+1}\right)^a = \frac{\pi}{4} \quad \dots \text{①}$$

以上からはさみうちの原理より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n} = \frac{\pi}{4} \quad \dots \text{答}$$

(3) (1)と同様にして,

$$\frac{\sin^2 x}{\{(2n+1)\pi\}^a} \leq \frac{\sin^2 x}{x^a} \leq \frac{\sin^2 x}{(2n\pi)^a}$$

だから,

$$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{\{(2n+1)\pi\}^a} dx \leq \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x^a} dx \leq \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{(2n\pi)^a} dx$$

が成立する。

$$\begin{aligned} \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin^2 x dx &= \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx \\ &= \left[\frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \right]_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

だから,

$$\text{最左辺} = \frac{\pi}{2\{(2n+1)\pi\}^a}$$

$$\text{最右辺} = \frac{\pi}{2(2n\pi)^a}$$

以上より,

$$\frac{\pi}{2\{(2n+1)\pi\}^a} \leq C_n \leq \frac{\pi}{2(2n\pi)^a}$$

これと(2)より,

$$\left(1 - \frac{1}{4n+1}\right)^a \leq \frac{A_n}{C_n} \leq \left(1 + \frac{1}{4n+1}\right)^a$$

が成立する。

①からはさみうちの原理より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{C_n} = 1 \quad \dots \text{答}$$

⑤

(1) 三角形 ABP が鋭角三角形となるための条件は、

$\angle PAB$ が鋭角 …①

$\angle PBA$ が鋭角 …②

$\angle APB$ が鋭角 …③

の 3 つが同時に成立すること。

そこで 3 点 A, B, C と

$$\text{円 } C : x^2 + y^2 = 4$$

を考えると、

①が成立するための条件は

$$-2 < t \text{ (これは } t > 0 \text{ のとき成立している)}$$

②が成立するための条件は

$$t < 2$$

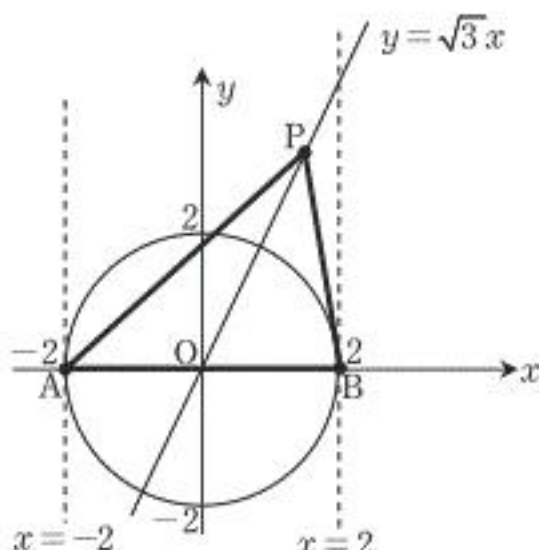
③が成立するための条件は

点 P が円 C の外部にあること

だから、

$$t > 0 \quad \text{かつ} \quad t < 2 \quad \text{かつ} \quad t^2 + (\sqrt{3}t)^2 > 4$$

より $1 < t < 2$ …答



(2) 三角形 ABP の垂心を H とするとき、H は、

点 P を通り、辺 AB に垂直な直線 l

点 B を通り、辺 AP に垂直な直線 m

の交点である。

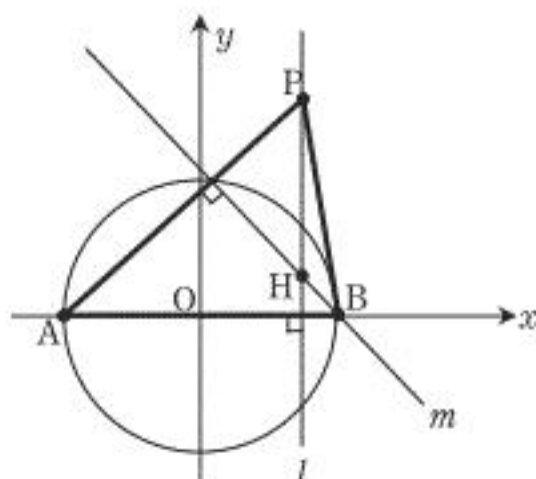
の方程式は、 $x = t$

直線 AP の傾きは $\frac{\sqrt{3}t}{t+2}$ だから、

$$m \text{ の方程式は、 } y = -\frac{t+2}{\sqrt{3}t}(x-2)$$

l, m の交点を求めることで、求める垂心の座標は、

$$H\left(t, \frac{4-t^2}{\sqrt{3}t}\right) \quad \text{…答}$$



(3) 点 P を線分 RQ で折り曲げた場合、点 P は、点 P を通り線分 RQ に垂直な平面上にある。

今、条件より $RQ \parallel AB$ (中点連結定理より) だから、

点 P は、点 P を通り辺 AB に垂直な平面上にある。

2 点 A, B についても同様に考えると、四面体を作った場合に

3 点 P, A, B は、三角形 ABP の垂心 H を通り $\triangle MQR$ に

垂直な直線上にあることがわかる。そこで、z 軸追加した

xyz 空間を考えると、3 点 P, A, B が交わる点を T として、

$$T\left(t, \frac{4-t^2}{\sqrt{3}t}, z\right) \quad (z > 0)$$

と表せる。TM = 2 だから、

$$t^2 + \left(\frac{4-t^2}{\sqrt{3}t}\right)^2 + z^2 = 2^2 \quad \text{つまり、} \quad z^2 = \frac{4(4-t^2)(t^2-1)}{3t^2}$$

$1 < t < 2$ より $1 < t^2 < 4$ だからこの右辺は正であり、

$$z = \frac{2\sqrt{(4-t^2)(t^2-1)}}{\sqrt{3}t}$$

さて、 $\triangle MQR = \frac{1}{4} \triangle ABP$ であり、

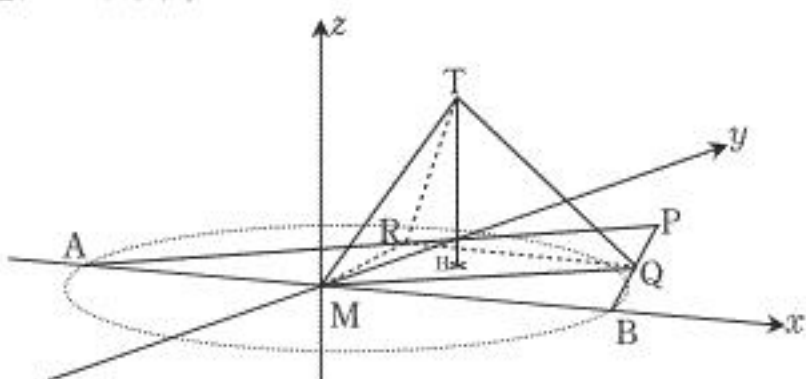
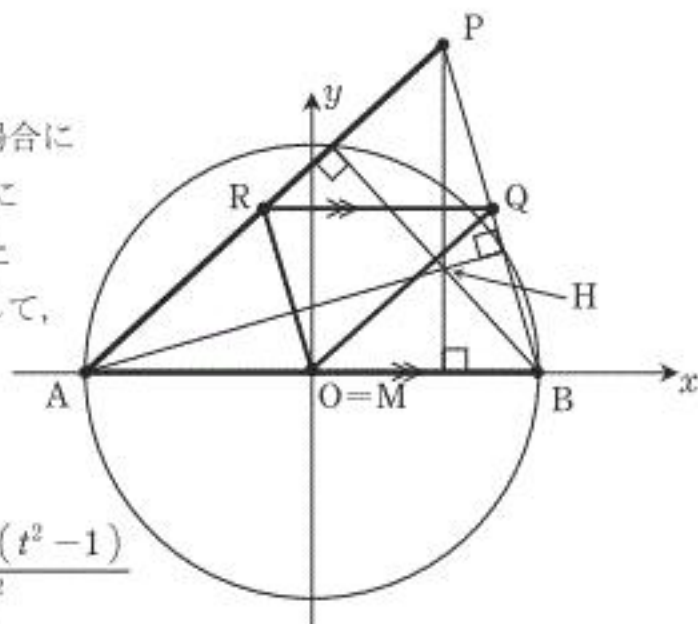
$$\triangle ABP = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{3}t = 2\sqrt{3}t$$

だから、 $\triangle MQR = \frac{\sqrt{3}t}{2}$

よって四面体 TMQR の体積を V とすると、

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \triangle MQR \cdot TH \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}t}{2} \cdot \frac{2\sqrt{(4-t^2)(t^2-1)}}{\sqrt{3}t} \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{\frac{9}{4} - \left(t^2 - \frac{5}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

これは $t^2 = \frac{5}{2}$ つまり $t = \frac{\sqrt{10}}{2}$ で最大となり、最大値は $\frac{1}{3} \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1}{2}$ …答



[6]

(1) n が k ・連続和であるとする。このとき、

$$\begin{aligned} n &= m + (m+1) + \cdots + (m+k-1) \\ &= \frac{k}{2} \{ m + (m+k-1) \} \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

を満たす自然数 m が存在し、

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow m = \frac{n}{k} - \frac{k}{2} + \frac{1}{2}$$

より (A) は成立する。また、

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow 2n = k^2 + k(2m-1)$$

であり、 $k \geq 2$ 、 $m \geq 1$ だから $k(2m-1) > 0$ が成立するので、

$$2n = k^2 + k(2m-1) > k^2 + 0 = k^2$$

つまり (B) も成立する。

逆に (A)、(B) が成立するとき、

(A) より l を整数として

$$\frac{n}{k} - \frac{k}{2} + \frac{1}{2} = l \quad \cdots \textcircled{2}$$

とおける。このとき、(B) より、

$$l = \frac{2n - k^2 + k}{2k} > \frac{k}{2k} = \frac{1}{2} > 0$$

だから l は自然数である。また $\textcircled{2}$ より、

$$n = \frac{k}{2} \{ l + (l+k-1) \} = l + (l+1) + (l+2) + \cdots + (l+k-2) + (l+k-1)$$

が成立するから n は l から $l+k-1$ までの連続する k 個の自然数の和であるので、

n は k ・連続和である。

以上より題意は示せた。 $\cdots$ 証明終わり

(2) $n = 2^f$ のとき、 n が k ・連続和であるような 2 以上の k が存在すると仮定する。

このとき $\textcircled{1}$ より、

$$2^f = \frac{k}{2} \{ m + (m+k-1) \}$$

つまり、

$$2^{f+1} = k(2m+k-1)$$

が成立する。 k 、 $2m+k-1$ は

$$2m+k-1 > k > 0$$

を満たす整数であるから、 k 、 $2m+k-1$ はともに 2^{f+1} の正の約数であり、

$$(2m+k-1) + k = 2(m+k) - 1 \quad (\text{奇数})$$

より k 、 $2m+k-1$ の偶奇は異なるから、いずれか一方は 1 である。

$k \geq 2$ だから $2m+k-1 = 1$ であるしかないが、このとき、

$$k = 2(1-m) \leq 0 \quad (m \text{ は自然数})$$

なので設定に反する。以上より、

$n = 2^f$ のとき、 n が k ・連続和であるような 2 以上の k は存在しない。 $\cdots$ 証明終わり

(3) p を 3 以上の奇素数、 f を自然数とすると、 $k^2 < 2p^f$ を満たす整数 k で、

$$g(k) = \frac{p^f}{k} - \frac{k}{2} + \frac{1}{2}$$

が整数となるための条件を考える。

(i) k が偶数の場合

(ア) $k = 2^q r$ (q は 2 以上の自然数、 r は自然数で奇数) のとき、

$$g(k) = \frac{p^f + 2^{q-1} r}{2^q r} - 2^{q-1} r$$

となり、これが整数となるのは

$$\frac{p^f + 2^{q-1} r}{2^q r} = M \quad (M \text{ は自然数})$$

と書けるとき。よって、 $p^f = 2^{q-1} r(2M-1)$ であるが、左辺は奇数、右辺は偶数だから

これは成立しない。よって $g(k)$ は整数ではない。

(イ) $k = 2r$ (r は自然数で奇数) のとき、

$$g(k) = \frac{p^f + r}{2r} - r$$

となり、これが整数となるのは

$$\frac{p^f + r}{2r} = N \quad (N \text{ は自然数})$$

と書けるとき。よって、 $p^f = r(2N-1)$ より、

$$r = p^a, \quad 2N-1 = p^b, \quad a+b=f, \quad a, b \text{ は } 0 \text{ 以上の整数}$$

と表せる。よって、

$$k = 2p^a \quad (0 \leq a \leq f)$$

と表せるときに $g(k)$ は整数となる。

さて、 $k^2 < 2p^f$ へ代入すると、

$$4p^{2a} < 2p^f \quad \text{つまり、} \quad 2 < p^{f-2a}$$

$p \geq 3$ だから $f-2a \geq 1$ で成立する。

よって $a \leq \frac{f-1}{2}$ であり、 $\frac{f-1}{2} \leq f$ であるから、

$$0 \leq a \leq \frac{f-1}{2}$$

f が偶数のとき、これを満たす整数 a は $0, 1, 2, \dots, \frac{f-2}{2}$ の $\frac{f}{2}$ 個

f が奇数のとき、これを満たす整数 a は $0, 1, 2, \dots, \frac{f-1}{2}$ の $\frac{f+1}{2}$ 個

(ii) k が奇数の場合

$$g(k) = \frac{p^f}{k} + \frac{1-k}{2}$$

について、 $\frac{1-k}{2}$ は整数であるから、 $\frac{p^f}{k}$ が整数となるような k を考える。

それは k が p^f の約数の場合であり、

$$k = p^l \quad (l \text{ は自然数})$$

と表せるものに限る。 $k^2 < 2p^f$ へ代入すると、

$$p^{2l} < 2p^f$$

$$\Leftrightarrow p^{2l-f} < 2$$

$p \geq 3$ なので、これが成立するのは、

$$2l-f \leq 0$$

のときであり、 $l \geq 1$ とで、

$$1 \leq l \leq \frac{f}{2}$$

f が偶数のとき、これを満たす自然数 l は $1, 2, 3, \dots, \frac{f}{2}$ の $\frac{f}{2}$ 個ある。

f が奇数のとき、これを満たす自然数 l は $1, 2, 3, \dots, \frac{f-1}{2}$ の $\frac{f-1}{2}$ 個ある。

以上から、 $n = p^f$ のとき、 n が k ・連続和となるような自然数 k の個数は、

f が偶数のとき、

$$\frac{f}{2} + \frac{f}{2} = f \quad (\text{個})$$

f が奇数のとき、

$$\frac{f+1}{2} + \frac{f-1}{2} = f \quad (\text{個})$$

いずれにせよ、 f (個) $\cdots$ 答