

①

(1)  $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} = (3s+t, s+2t)$

について、 $P(x, y)$  とすると、

$$x = 3s + t, \quad y = s + 2t$$

これを  $s, t$  について解くと、

$$s = \frac{2x - y}{5}, \quad t = \frac{-x + 3y}{5}$$

これらを、

$$-1 \leq s \leq 1, \quad -1 \leq t \leq 1, \quad -1 \leq s + t \leq 1$$

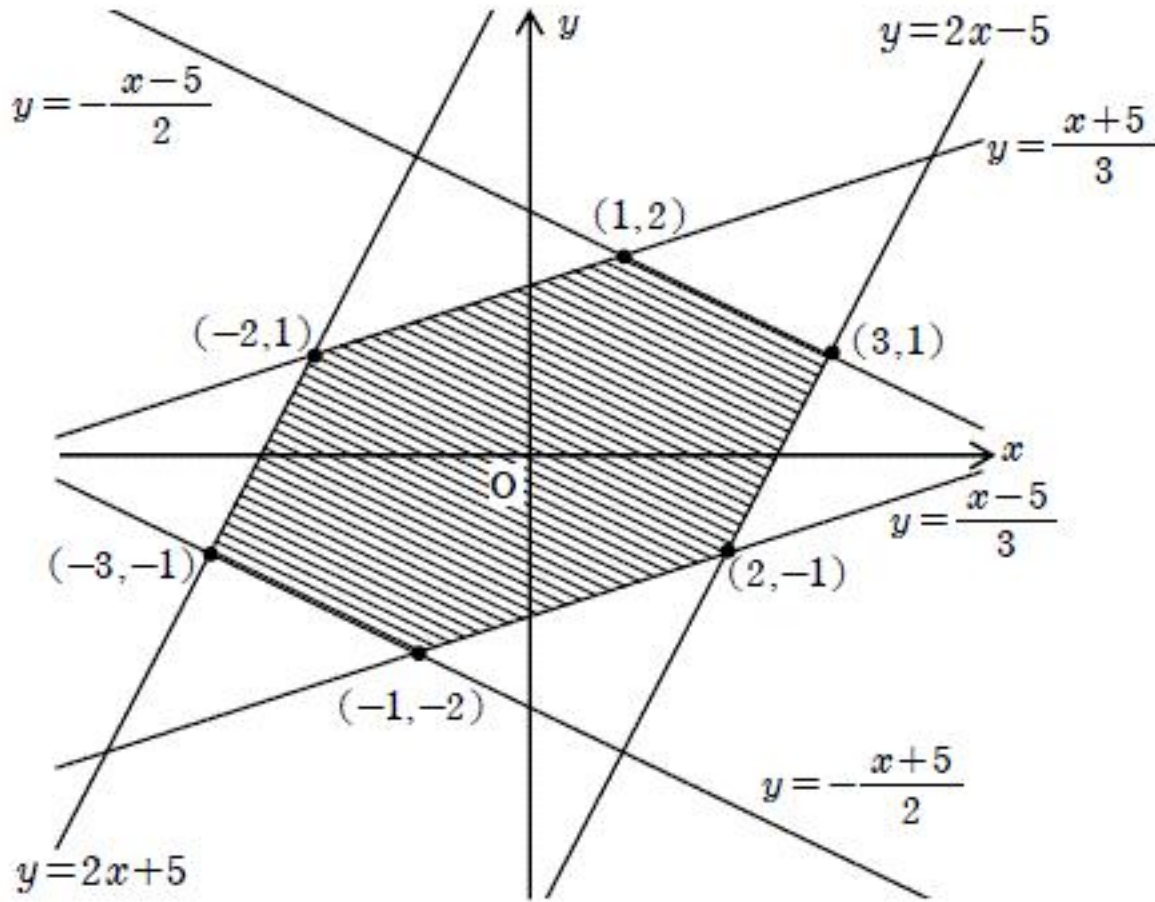
へ代入して  $s, t$  を消去すると、

$$-1 \leq \frac{2x - y}{5} \leq 1, \quad -1 \leq \frac{-x + 3y}{5} \leq 1, \quad -1 \leq \frac{2x - y}{5} + \frac{-x + 3y}{5} \leq 1$$

整理すると、

$$2x - 5 \leq y \leq 2x + 5, \quad \frac{x - 5}{3} \leq y \leq \frac{x + 5}{3}, \quad -\frac{x + 5}{2} \leq y \leq -\frac{x - 5}{2}$$

よって、点  $P$  の存在領域  $D$  は下の図の斜線部分である。(境界はすべて含む)



(2)  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC} = k$  とすると、

$$k = x \cdot (-1) + y \cdot 1$$

より、

$$y = x + k \quad \cdots \textcircled{1}$$

$xy$  平面で、直線①が、(1)で図示した領域  $D$  と共有点を持つような範囲で、 $k$  の値が最大となる条件を考える。

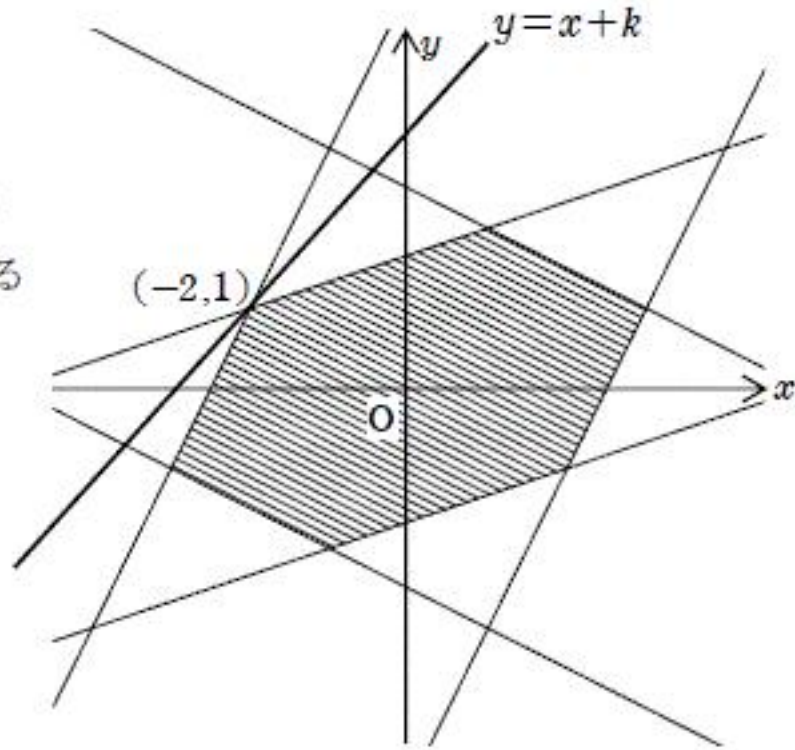
すると、①が点  $(-2, 1)$  を通るとき、

①の  $y$  切片、つまり  $k$  は最大となり、

$$k = 1 - (-2) = 3$$

よって、

最大値は 3,  $P$  の座標は  $(-2, 1)$  …答





[2]

(1)  $y = -2|x| + k$  のグラフが放物線  $C: y = -\frac{1}{2}x^2$  と共有点をもつための条件は、

$-2|x| + k = -\frac{1}{2}x^2$  を満たす実数  $x$  が存在すること。

よって、 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2|x|$  とおいたとき、

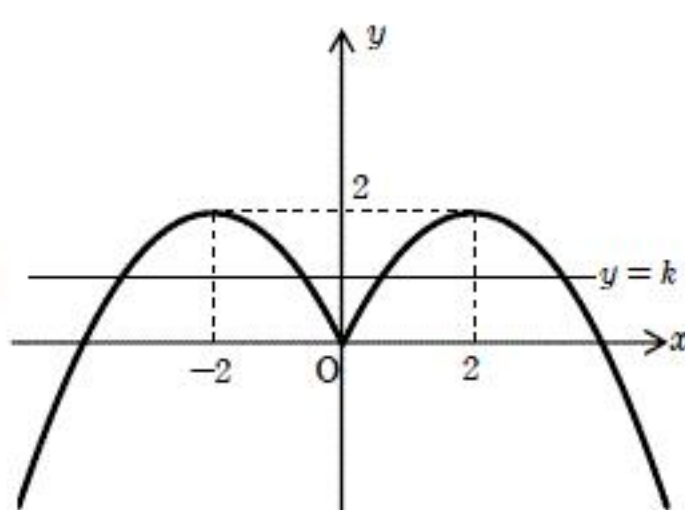
曲線  $y = f(x)$  と直線  $y = k$  が共有点を持つため  $k$  の条件を求めればよい。

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2 & (x \geq 0) \\ -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 2 & (x \leq 0) \end{cases}$$

より  $y = f(x)$  のグラフは右のようになるから、

求める条件は、

$$k \leq 2 \quad \cdots \text{答}$$



(2)  $y = -2|x-a| + b$  のグラフが放物線  $C: y = -\frac{1}{2}x^2$  と共有点をちょうど 4 個もつための条件は、

$-2|x-a| + b = -\frac{1}{2}x^2$  を満たす実数  $x$  が異なる 4 個存在すること。

よって、 $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2|x-a|$  とおいたとき、

曲線  $y = g(x)$  と直線  $y = b$  が共有点をちょうど 4 個持つ

ため  $b$  の条件を求めればよい。

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2 - 2a & (x \geq a) \\ -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 2 + 2a & (x \leq a) \end{cases}$$

共有点をちょうど 4 個もつには、

$x > a$  に軸  $x = 2$  が存在し、かつ  $x < a$  に軸  $x = -2$  が存在する

必要があるので、(そうでなければ  $x \geq a$  または  $x \leq a$  で  $g(x)$  は単調な関数になる)

$$-2 < a < 2$$

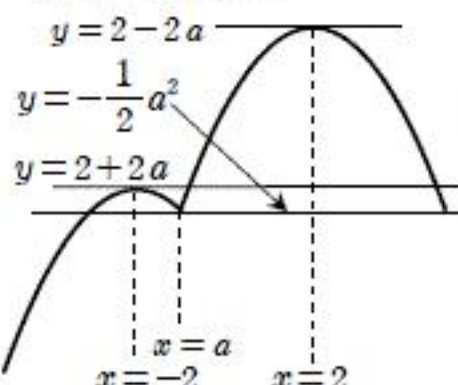
この  $a$  の範囲で考える。また、

$$2 - 2a - (2 + 2a) = -4a$$

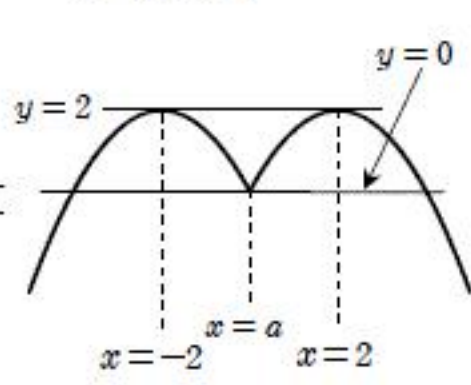
$$-\frac{1}{2}x^2 + 2(x-a) = -\frac{1}{2}x^2 - 2(x-a) \text{ から } x = a$$

の計算とで、 $y = g(x)$  のグラフは、 $a$  の値で場合分けをして、次のようになる。

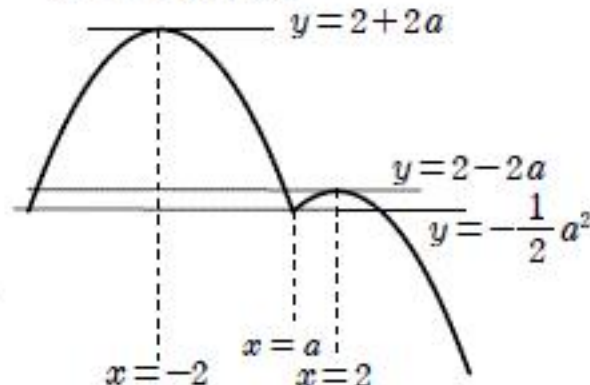
$-2 < a < 0$  のとき



$a = 0$  のとき



$0 < a < 2$  のとき



以上より、曲線  $y = g(x)$  と直線  $y = b$  が共有点を

ちょうど 4 個持つため  $b$  の条件は、

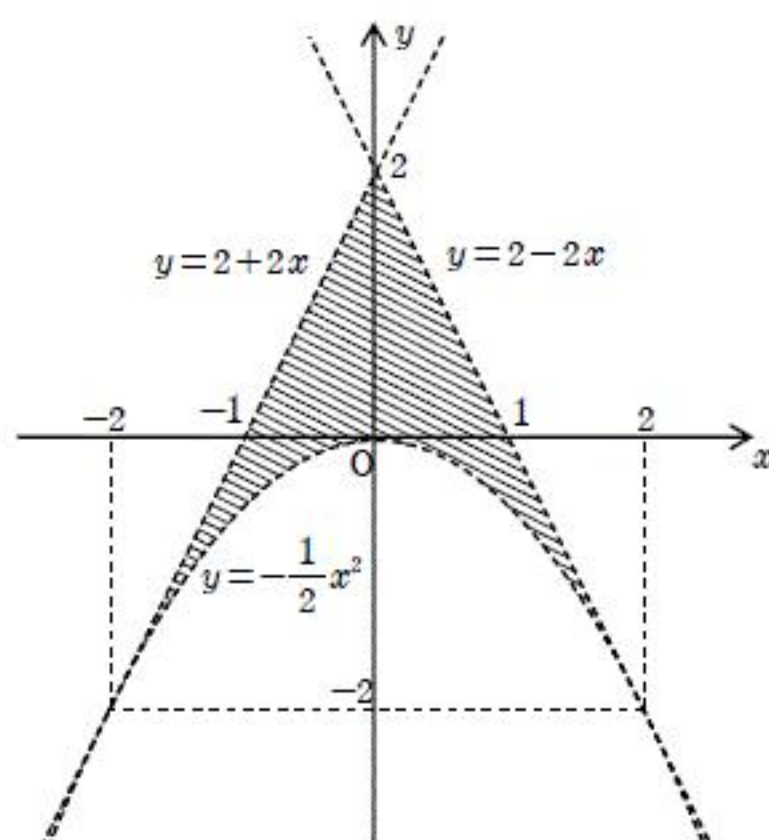
$$-2 < a < 0 \text{ のとき、 } -\frac{1}{2}a^2 < b < 2 + 2a$$

$$a = 0 \text{ のとき、 } 0 < b < 2$$

$$0 < a < 2 \text{ のとき、 } -\frac{1}{2}a^2 < b < 2 - 2a$$

よって領域  $D$  は図の斜線部分

(境界はすべて含まない)



(3) 領域  $D$  の面積を  $S$  とすると、領域  $D$  の  $y$  軸に関する対称性より、

$$S = 2 \int_0^2 \left\{ 2 - 2x - \left( -\frac{1}{2}x^2 \right) \right\} dx$$

$$= \int_0^2 (x-2)^2 dx$$

$$= \left[ \frac{1}{3}(x-2)^3 \right]_0^2$$

$$= \frac{8}{3} \quad \cdots \text{答}$$



[3]

条件より、 $l, m, n$  を 0 以上の整数として、

$$7l + 9m + 12n = 54 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成立する。 $\textcircled{1}$ を満たす 0 以上の整数( $l, m, n$ )の組を求める。 $\textcircled{1}$ を式変形すると、

$$7l + 9m = 6(9 - 2n)$$

ここで  $7l + 9m \geq 0$  だから、

$$9 - 2n \geq 0$$

よって、

$$n \leq \frac{9}{2}$$

これを満たす 0 以上の整数は、

$$n = 0, 1, 2, 3, 4$$

の 5 通りのみ。

(i)  $n = 0$  のとき、 $\textcircled{1}$ は、

$$7l + 9m = 54$$

$$7l = 9(6 - m)$$

7 と 9 は互いに素だから整数  $p$  を用いて

$$l = 9p, \quad 6 - m = 7p$$

と表せる。 $l \geq 0, \quad m \geq 0$  だから、

$$p \geq 0, \quad 6 - 7p \geq 0 \text{ より } 0 \leq p \leq \frac{6}{7}$$

これを満たす整数  $p$  は、 $p = 0$  のみ。このとき  $l = 0, \quad m = 6$  である。

(ii)  $n = 1$  のとき、 $\textcircled{1}$ は、

$$7l + 9m = 42$$

$$9m = 7(6 - l)$$

9 と 7 は互いに素だから整数  $q$  を用いて

$$m = 7q, \quad 6 - l = 9q$$

と表せる。 $l \geq 0, \quad m \geq 0$  だから、

$$6 - 9q \geq 0, \quad q \geq 0 \text{ より } 0 \leq q \leq \frac{2}{3}$$

これを満たす整数  $q$  は  $q = 0$  のみ。このとき  $m = 0, \quad l = 6$  である。

(iii)  $n = 2$  のとき、 $\textcircled{1}$ は、

$$7l + 9m = 30$$

$$7l = 3(10 - 3m)$$

7 と 3 は互いに素だから整数  $r$  を用いて

$$l = 3r, \quad 10 - 3m = 7r$$

と表せる。 $l \geq 0, \quad m \geq 0$  だから、

$$r \geq 0, \quad 10 - 7r \geq 0 \text{ より } 0 \leq r \leq \frac{10}{7}$$

これを満たす整数  $r$  は、 $r = 0, 1$  のみ。このとき  $(l, m) = \left(0, \frac{10}{3}\right), (3, 1)$  となるが、 $l, m$  は整数だから、

$(l, m) = (3, 1)$  である。

(iv)  $n = 3$  のとき、 $\textcircled{1}$ は、

$$7l + 9m = 18$$

$$7l = 9(2 - m)$$

7 と 9 は互いに素だから整数  $s$  を用いて

$$l = 9s, \quad 2 - m = 7s$$

と表せる。 $l \geq 0, \quad m \geq 0$  だから、

$$s \geq 0, \quad 2 - 7s \geq 0 \text{ より } 0 \leq s \leq \frac{2}{7}$$

これを満たす整数  $s$  は、 $s = 0$  のみ。このとき  $l = 0, \quad m = 2$  である。

(v)  $n = 4$  のとき、 $\textcircled{1}$ は、

$$7l + 9m = 6$$

$$7l = 3(2 - 3m)$$

7 と 3 は互いに素だから整数  $t$  を用いて

$$l = 3t, \quad 2 - 3m = 7t$$

と表せる。 $l \geq 0, \quad m \geq 0$  だから、

$$t \geq 0, \quad 2 - 7t \geq 0 \text{ より } 0 \leq t \leq \frac{2}{7}$$

これを満たす整数  $t$  は、 $t = 0$  のみ。このとき  $l = 0, \quad m = \frac{2}{3}$  であるが、 $m$  が整数でないので不適。

以上から、求める組  $(l, m, n)$  は、

$$(0, 6, 0), (6, 0, 1), (3, 1, 2), (0, 2, 3) \quad \cdots \text{答}$$

4

(1)  $BE \perp AC$ ,  $CF \perp AB$  だから、

$$\angle BEC = \angle BFC = 90^\circ$$

よって 2 点  $E$ ,  $F$  は線分  $BC$  を直径とする同一円周上にある。

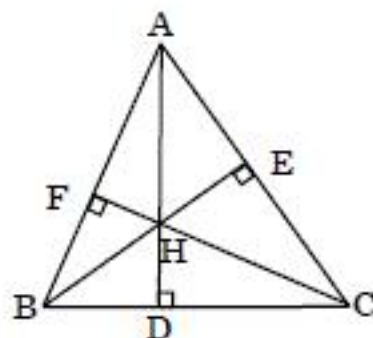
従って、四角形  $BCEF$  は円に内接する。 …① …証明終わり

また、

$$\angle AEH = \angle AFH = 90^\circ$$

なので、2 点  $E$ ,  $F$  は線分  $AH$  を直径とする同一円周上にある。

従って、四角形  $AFHE$  は円に内接する。 …証明終わり



(2) (1)と同様にして、

四角形  $BDHF$ , 四角形  $CDHE$  は共に円に内接する。 …②

すると、②より、

$$\angle ADE = \angle HDE = \angle HCE$$

$$\angle ADF = \angle HDF = \angle HBF$$

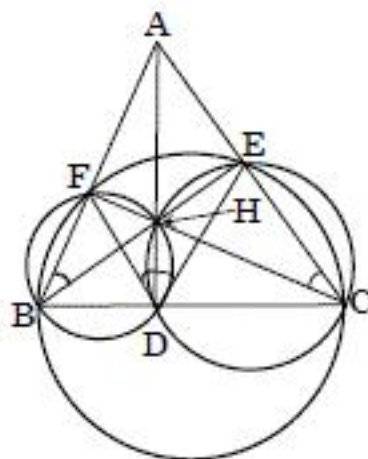
が成立し、さらに①により、

$$\angle HCE = \angle FCE = \angle FBE = \angle FBH (= \angle HBF)$$

だから、

$$\angle ADE = \angle ADF$$

である。 …証明終わり



※  $\angle HCE = \angle HBF$  は  $\triangle ECH \sim \triangle FBH$  から示せる。