

①

(1) $BE \perp AC$, $CF \perp AB$ だから、

$$\angle BEC = \angle BFC = 90^\circ$$

よって 2 点 E, F は線分 BC を直径とする同一円周上にある。

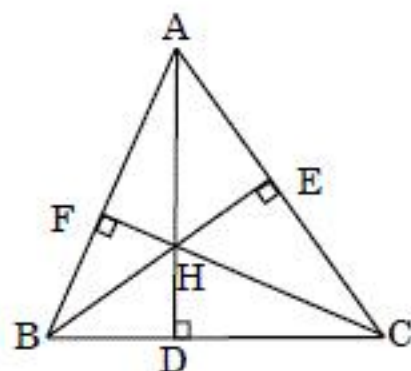
従って、四角形 BCEF は円に内接する。 …① …証明終わり

また、

$$\angle AEH = \angle AFH = 90^\circ$$

なので、2 点 E, F は線分 AH を直径とする同一円周上にある。

従って、四角形 AFHE は円に内接する。 …証明終わり



(2) (1)と同様にして、

四角形 BDHF, 四角形 CDHE は共に円に内接する。 …②

すると、②より、

$$\angle ADE = \angle HDE = \angle HCE$$

$$\angle ADF = \angle HDF = \angle HBF$$

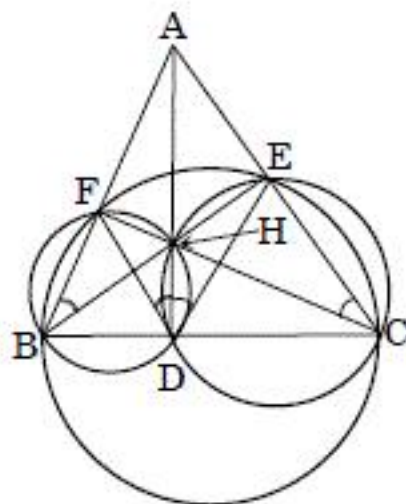
が成立し、さらに①により、

$$\angle HCE = \angle FCE = \angle FBE = \angle FBH (= \angle HBF)$$

だから、

$$\angle ADE = \angle ADF$$

である。 …証明終わり



※ $\angle HCE = \angle HBF$ は $\triangle ECH \sim \triangle FBH$ から示せる。

[2]

(1) $a_n = 2^n - n^2 - 7$

とおく。 $n \geq 6$ のとき $a_n > 0$ であることを証明する。

(i) $n = 6$ のとき、

$$\begin{aligned} a_6 &= 2^6 - 6^2 - 7 \\ &= 64 - 36 - 7 \\ &= 21 > 0 \end{aligned}$$

よって $n = 6$ のとき成立する。

(ii) $n = k (k \geq 6)$ のとき、

$$a_k = 2^k - k^2 - 7 > 0$$

と仮定する。このとき、

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2^{k+1} - (k+1)^2 - 7 \\ &= 2(2^k - k^2 - 7) + k^2 - 2k + 6 \\ &= 2a_k + (k-1)^2 + 5 > 0 \end{aligned}$$

より $n = k+1$ でも成立する。

以上から数学的帰納法により、

6 以上の整数 n に対して $2^n > n^2 + 7$ が成り立つ …証明終わり

(2) p, q を素数とするとき、

$$p^q = q^p + 7 \quad \cdots \textcircled{1}$$

を考える。

(i) $p = 2$ のとき、 $\textcircled{1}$ は、

$$2^q = q^2 + 7 \quad \cdots \textcircled{2}$$

左辺は偶数なので $q^2 + 7$ も偶数であるから q は奇数でなければならない。

さて(1)の結果より、

$$q \geq 6 \text{ のとき } 2^q > q^2 + 7$$

だから、 $\textcircled{2}$ を満たす奇素数 q は $q \leq 5$ で考えれば十分である。

(ア) $q = 3$ のとき、

$$2^3 = 8, \quad 3^2 + 7 = 16$$

より $\textcircled{2}$ は成立しない。

(イ) $q = 5$ のとき、

$$2^5 = 32, \quad 5^2 + 7 = 32$$

より $\textcircled{2}$ は成立する。

以上より、 $(p, q) = (2, 5)$ は $\textcircled{1}$ を満たす。

(ii) $p \geq 3$ のとき、 p は素数だから奇素数である。このとき $\textcircled{1}$ について、

p^q は奇数なので $q^p + 7$ も奇数であるから q^p は偶数、つまり q は偶数でなければならない。

q は素数だから $q = 2$ のみ考えられる。よって、

$$p^2 = 2^p + 7 \quad \cdots \textcircled{3}$$

を満たす奇素数 p を考えればよい。

さて(1)の結果より、

$$p \geq 6 \text{ のとき } 2^p > p^2 + 7$$

なので、 $p \geq 6$ では、

$$p^2 = 2^p + 7 > p^2 + 14$$

となるが、これは成立しない。よって $p \leq 5$ で考えればよい。

(ア) $p = 3$ のとき、

$$3^2 = 9, \quad 2^3 + 7 = 15$$

より $\textcircled{3}$ は成立しない。

(イ) $p = 5$ のとき、

$$5^2 = 25, \quad 2^5 + 7 = 39$$

より $\textcircled{3}$ は成立しない。

以上(i)(ii)より、

$$(p, q) = (2, 5) \quad \cdots \text{答}$$

③

a, b, c はすべて 1 以上 6 以下の整数であり、

(a, b, c) の組は全部で $6^3 = 216$ (通り)

あり、それらはすべて同様に確からしい。

(1) x, y, z をすべて 1 以上 6 以下の整数とする。このとき、

$$x^2 + y^2 = z^2$$

をみたすものは、下の x, y の値と $x^2 + y^2$ の値の表から平方数となるものを調べることで、

	1	2	3	4	5	6
1	2	5	10	17	26	37
2	5	8	13	20	29	40
3	10	13	18	25	34	45
4	17	20	25	32	41	52
5	26	29	34	41	50	61
6	37	40	45	52	61	72

$(x, y, z) = (3, 4, 5), (4, 3, 5)$ のみである。よって、

$$\{a, b, c\} = \{3, 4, 5\}$$

となる確率を求めればよく、

$$\frac{3!}{216} = \frac{1}{36} \quad \cdots \text{答}$$

(2) x, y, z をすべて 1 以上 6 以下の整数とする。このとき、

$$x^2 + y^2 < z^2, \quad z < x + y \quad \cdots \text{①}$$

をみたすものを考える。下の x, y の値と「 $x^2 + y^2$ の値, $(x + y)^2$ の値」の表から

①、つまり、

$$x^2 + y^2 < z^2, \quad z^2 < (x + y)^2$$

をみたすような z が存在するものを調べよう。

$$1 \leq z \leq 6 \text{ だから } 1 \leq z^2 \leq 36$$

$$\text{従って、} x^2 + y^2 \geq 36 \text{ は不適}$$

であることに注意すると、

	1	2	3	4	5	6
1	2, 4	5, 9	10, 16	17, 25	26, 36	37, 49
2	5, 9	8, 16	13, 25	20, 36	29, 49	40, 64
3	10, 16	13, 25	18, 36	25, 49	34, 64	45, 81
4	17, 25	20, 36	25, 49	32, 64	41, 81	52, 100
5	26, 36	29, 49	34, 64	41, 81	50, 100	61, 121
6	37, 49	40, 64	45, 81	52, 100	61, 121	72, 144

①を満たす 1 以上 6 以下の整数 (x, y, z) の組は、

$$(2, 2, 3),$$

$$(2, 3, 4), (3, 2, 4),$$

$$(2, 4, 5), (3, 3, 5), (4, 2, 5),$$

$$(2, 5, 6), (3, 4, 6), (4, 3, 6), (5, 2, 6),$$

$$(3, 5, 6), (4, 4, 6), (5, 3, 6)$$

の 13 組が存在する。同様にして、

$$y^2 + z^2 < x^2, \quad x < y + z \quad \cdots \text{②} \quad \text{をみたす } (x, y, z) \text{ も 13 組}$$

$$z^2 + x^2 < y^2, \quad y < z + x \quad \cdots \text{③} \quad \text{をみたす } (x, y, z) \text{ も 13 組}$$

あり、①、②、③は重なりなく、またこれらで尽くされる。

以上から条件をみたす (a, b, c) の組は $13 \cdot 3 = 39$ (組) あるので、求める確率は、

$$\frac{39}{216} = \frac{13}{72} \quad \cdots \text{答}$$

[4]

$$\begin{aligned}(1) \quad (x+i)^7-(x-i)^7 &= \sum_{k=0}^7 {}_7C_k x^k i^{7-k} - \sum_{k=0}^7 {}_7C_k x^k (-i)^{7-k} \\ &= \sum_{k=0}^7 {}_7C_k x^k \{ i^{7-k} - (-i)^{7-k} \}\end{aligned}$$

ここで、

$$i^{7-k}-(-i)^{7-k}=\begin{cases} 0 & (k \text{ は奇数}) \\ 2i^{7-k} & (k \text{ は偶数}) \end{cases}$$

だから、

$$\begin{aligned}(x+i)^7-(x-i)^7 &= {}_7C_0 x^0 \cdot 2i^7 + {}_7C_2 x^2 \cdot 2i^5 + {}_7C_4 x^4 \cdot 2i^3 + {}_7C_6 x^6 \cdot 2i^1 \\ &= -2i + 42ix^2 - 70ix^4 + 14ix^6\end{aligned}$$

従って、

$$\begin{aligned}P(x) &= \frac{14ix^6-70ix^4+42ix^2-2i}{2i} \\ &= 7x^6-35x^4+21x^2-1\end{aligned}$$

だから、

$$a_0=0, \quad a_1=7, \quad a_2=0, \quad a_3=-35, \quad a_4=0, \quad a_5=21, \quad a_6=0, \quad a_7=-1 \quad \cdots \text{答}$$

$$(2) \quad 2i\sin^7\theta \cdot P\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

$$\begin{aligned}&= \sin^7\theta \left\{ \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+i\right)^7 - \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-i\right)^7 \right\} \\ &= (\cos\theta+i\sin\theta)^7 - (\cos\theta-i\sin\theta)^7 \\ &= \cos 7\theta + i\sin 7\theta - \{ \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) \}^7 \\ &= \cos 7\theta + i\sin 7\theta - \{ \cos(-7\theta) + i\sin(-7\theta) \} \\ &= \cos 7\theta + i\sin 7\theta - (\cos 7\theta - i\sin 7\theta) \\ &= \cos 7\theta + i\sin 7\theta - \cos 7\theta + i\sin 7\theta \\ &= 2i\sin 7\theta\end{aligned}$$

よって、

$$P\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) = \frac{\sin 7\theta}{\sin^7\theta} \quad \cdots \text{証明終わり}$$

$$(3) \quad Q(x)=7x^3-35x^2+21x-1 \text{ であり、}$$

$$P(x)=Q(x^2)$$

が成立する。さて、 $y_k = \frac{\cos k\theta}{\sin k\theta} \ (k=1,2,3)$ とすると、

$$P(y_k)=Q(y_k^2)$$

が成立し、 $y_k^2 = x_k$ だから、

$$\begin{aligned}Q(x_k) &= P(y_k) \\ &= P\left(\frac{\cos k\theta}{\sin k\theta}\right) \\ &= \frac{\sin 7k\theta}{\sin^7 k\theta} \quad \left(0 < \frac{\pi}{7} \leq k\theta \leq \frac{3\pi}{7} < \pi \text{ より}\right) \\ &= 0 \quad \left(7k\theta = 7k \cdot \frac{\pi}{7} = k\pi \text{ より}\right)\end{aligned}$$

となり、 x_1, x_2, x_3 は x の 3 次方程式 $Q(x)=0$ の解である。また、

$$x_k = \frac{1}{\tan^2 k\theta} \text{ であり、 } 0 < \frac{\pi}{7} < \frac{2\pi}{7} < \frac{3\pi}{7} < \frac{\pi}{2} \text{ だから}$$

$x_1 > x_2 > x_3$ である。

以上より x_1, x_2, x_3 は x の 3 次方程式 $Q(x)=0$ の異なる 3 つの解だから、

解と係数の関係により、

$$x_1+x_2+x_3 = \frac{35}{7} = 5 \quad \cdots \text{答}$$

⑤

三角形 OPQ について、 $\angle QOP = \theta$ とすると平面 α と平面 β のなす角は θ であり、

$$\cos \theta = \frac{OP}{OQ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

だから、 $\theta = \frac{\pi}{6}$ である。従って、

平面 $\alpha : z = 0$, 平面 $\beta : z = \frac{1}{\sqrt{3}}x$, 直線 $l : y$ 軸

$O(0,0,0)$, $P(\sqrt{3},0,0)$, $Q(\sqrt{3},0,1)$, $T(\sqrt{3},0,t) (0 \leq t \leq 1)$

として考えても一般性を失わない。このとき S の方程式は、

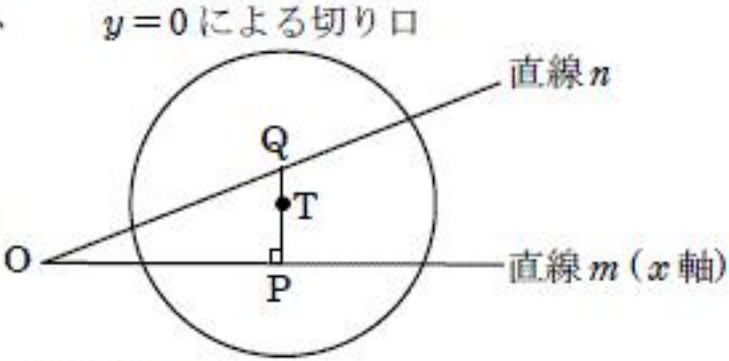
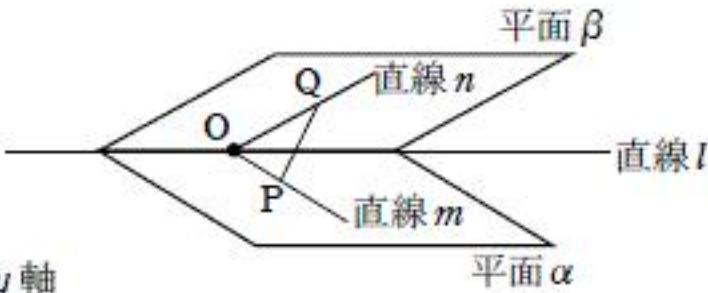
$$(x - \sqrt{3})^2 + y^2 + (z - t)^2 = 2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

で表せる。 S の平面 α による切り口は、①で $z = 0$ として、

$$(x - \sqrt{3})^2 + y^2 = 2 - t^2 (> 0)$$

よって、切り口は $z = 0$ 上で点 $(\sqrt{3}, 0, 0)$ を中心とする半径 $\sqrt{2 - t^2}$ の円であるから、その面積は、

$$\pi (\sqrt{2 - t^2})^2 = \pi (2 - t^2) \quad \cdots \text{答}$$



(2) S の平面 β による切り口を yz 平面へと正射影したものは、①で $x = \sqrt{3}z$ として、

$$(\sqrt{3}z - \sqrt{3})^2 + y^2 + (z - t)^2 = 2$$

より、楕円 $\frac{y^2}{\frac{5 + 6t - 3t^2}{4}} + \frac{\left(z - \frac{3 + t}{4}\right)^2}{\frac{5 + 6t - 3t^2}{16}} = 1 \quad \cdots \textcircled{2}$ である。

$(0 \leq t \leq 1$ で $5 + 6t - 3t^2 = -3(t - 1)^2 + 8 > 0$)

切り口は楕円②の長辺の長さに等しい半径をもつ円であり、楕円の長辺の長さは、

$$\sqrt{\frac{5 + 6t - 3t^2}{4}}$$

であるから、切り口の円の面積は、

$$\pi \left(\sqrt{\frac{5 + 6t - 3t^2}{4}} \right)^2 = \frac{\pi}{4} (5 + 6t - 3t^2)$$

従って、

$$\begin{aligned} f(t) &= \pi (2 - t^2) + \frac{\pi}{4} (5 + 6t - 3t^2) \\ &= -\frac{7}{4} \pi \left(t - \frac{3}{7} \right)^2 + \frac{25}{7} \pi \end{aligned}$$

$0 \leq t \leq 1$ であるから $f(t)$ は $t = \frac{3}{7}$ で最大となり、最大値は、

$$f\left(\frac{3}{7}\right) = \frac{25}{7} \pi \quad \cdots \text{答}$$

[6]

$$g(t) = \sin(t-x) - \sin 2t$$

とおくと、

$$\begin{aligned} g(t) &= 2 \cos \frac{(t-x)+2t}{2} \sin \frac{(t-x)-2t}{2} \\ &= -2 \cos \frac{3t-x}{2} \sin \frac{t+x}{2} \end{aligned}$$

ここで $0 \leq t \leq \pi$, $0 \leq x \leq \pi$ のとき、

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{3t-x}{2} \leq \frac{3\pi}{2}, \quad 0 \leq \frac{t+x}{2} \leq \pi$$

だから $\sin \frac{t+x}{2} \geq 0$ であり、

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{3t-x}{2} \leq \frac{\pi}{2}, \quad \text{つまり } \frac{x-\pi}{3} \leq t \leq \frac{x+\pi}{3} \text{ で } \cos \frac{3t-x}{2} \geq 0$$

$$\frac{\pi}{2} \leq \frac{3t-x}{2} \leq \frac{3\pi}{2}, \quad \text{つまり } \frac{x+\pi}{3} \leq t \leq \frac{x+3\pi}{3} \text{ で } \cos \frac{3t-x}{2} \leq 0$$

なので、

$$0 \leq t \leq \frac{x+\pi}{3} \text{ で } g(t) \leq 0, \quad \frac{x+\pi}{3} \leq t \leq \pi \text{ で } g(t) \geq 0$$

をみたす。よって、 $\alpha = \frac{x+\pi}{3}$ とおくと、

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^\pi |g(t)| dt \\ &= \int_0^\alpha -g(t) dt + \int_\alpha^\pi g(t) dt \\ &= -\left[-\cos(t-x) + \frac{1}{2} \cos 2t \right]_0^\alpha + \left[-\cos(t-x) + \frac{1}{2} \cos 2t \right]_\alpha^\pi \\ &= 2 \cos(\alpha-x) - \cos 2\alpha - \cos x - \cos(\pi-x) + 1 \\ &= 2 \cos(\alpha-x) - \cos 2\alpha + 1 \\ &= 2 \cos(\pi-2\alpha) - \cos 2\alpha + 1 \quad (3\alpha = x+\pi \text{ より } \alpha-x = \pi-2\alpha) \\ &= -3 \cos 2\alpha + 1 \end{aligned}$$

ここで $\frac{2}{3}\pi \leq 2\alpha \leq \frac{4}{3}\pi$ だから $-1 \leq \cos 2\alpha \leq -\frac{1}{2}$ なので、

$f(x)$ の最大値は、

$$-3 \cdot (-1) + 1 = 4 \quad \cdots \text{答}$$

$f(x)$ の最小値は、

$$-3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{5}{2} \quad \cdots \text{答}$$