

①

(1) 点 F は、

直線 AE 上 …①

直線 CD 上 …②

にある。①より、

$$\overrightarrow{AF} = k \overrightarrow{AE} \quad \dots \textcircled{3}$$

と表せる。ここで点 E は線分 BC を $s:3$ の比に内分する点だから、

$$\overrightarrow{AE} = \frac{3\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}}{s+3}$$

が成立する。これを③へ代入し、 $\overrightarrow{AE}$ を消去すると、

$$\overrightarrow{AF} = \frac{3k}{s+3} \overrightarrow{AB} + \frac{sk}{s+3} \overrightarrow{AC} \quad \dots \textcircled{4}$$

ここで、条件から $\overrightarrow{AB} = \frac{s+1}{s} \overrightarrow{AD}$ なので、これを④へ代入し、 $\overrightarrow{AB}$ を消去すると、

$$\overrightarrow{AF} = \frac{3k}{s+3} \cdot \frac{s+1}{s} \overrightarrow{AD} + \frac{sk}{s+3} \overrightarrow{AC} \quad \dots \textcircled{5}$$

が成立。さて、②より、

$$\frac{3k}{s+3} \cdot \frac{s+1}{s} + \frac{sk}{s+3} = 1$$

が成立するので、

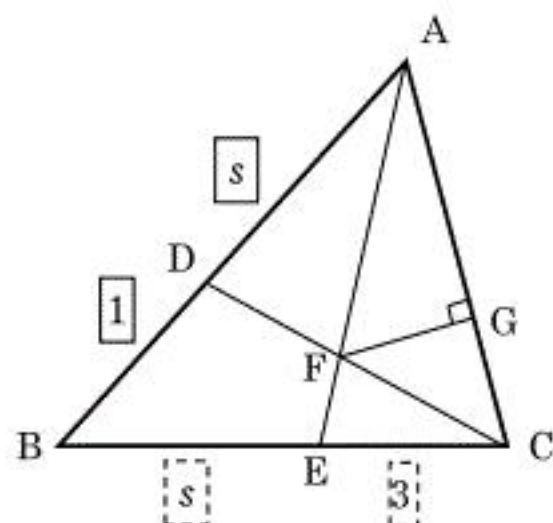
$$k = \frac{s(s+3)}{s^2 + 3s + 3}$$

これを④へ代入することで、

$$\overrightarrow{AF} = \frac{3s}{s^2 + 3s + 3} \overrightarrow{AB} + \frac{s^2}{s^2 + 3s + 3} \overrightarrow{AC}$$

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ は一次独立だから、

$$\alpha = \frac{3s}{s^2 + 3s + 3}, \quad \beta = \frac{s^2}{s^2 + 3s + 3} \quad \dots \text{答}$$



※③の k の値は、三角形 ABE と直線 DC についてメネラウスの定理を使うと、次のように出せる。

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BC}{CE} \cdot \frac{EF}{FA} = 1 \quad \text{から} \quad \frac{s}{1} \cdot \frac{s+3}{3} \cdot \frac{EF}{FA} = 1$$

$$\text{よって} \frac{EF}{FA} = \frac{3}{s(s+3)} \quad \text{なので、} \quad k = \frac{AF}{AE} = \frac{AF}{AF+FE} = \frac{s(s+3)}{s(s+3)+3} = \frac{s(s+3)}{s^2 + 3s + 3}$$

(2) FG の長さが最大となるのは、三角形 AFC の面積が最大となるときに一致する。よって、 $\triangle AFC$ の面積が最大となるような s の値を求めればよい。

⑤より、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AF} &= \frac{3(s+1)}{s^2 + 3s + 3} \overrightarrow{AD} + \frac{s^2}{s^2 + 3s + 3} \overrightarrow{AC} \\ &= \frac{3(s+1)\overrightarrow{AD} + s^2 \overrightarrow{AC}}{s^2 + 3(s+1)} \end{aligned}$$

よって点 F は線分 DC を $s^2 : 3(s+1)$ の比に内分する点である。

(これもメネラウスの定理から出しても良い。)

従って、

$$\begin{aligned} \triangle AFC &= \triangle ABC \times \frac{AD}{AB} \times \frac{CF}{CD} \\ &= \triangle ABC \times \frac{s}{1+s} \times \frac{3(s+1)}{s^2 + 3(s+1)} \\ &= \triangle ABC \times \frac{3s}{s^2 + 3s + 3} \end{aligned}$$

ここで $\frac{3s}{s^2 + 3s + 3} = f(s)$ とすると、 $\triangle AFC$ の面積が最大となるのは $f(s)$ が最大となるとき

であり、 $s > 0$ なので、

$$f(s) = \frac{3}{s+3+\frac{3}{s}} \leq \frac{3}{3+2\sqrt{s \cdot \frac{3}{s}}} = \frac{3}{3+2\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} - 3$$

が成立する。(相加平均・相乗平均の大小関係)

等号は $s = \frac{3}{s}$, $s > 0$ より $s = \sqrt{3}$ のとき成立し、このとき $f(s)$ は最大になる。

以上より、FG の長さが最大となるときの s の値は、

$$s = \sqrt{3} \quad \dots \text{答}$$

[2]

$$(1) \quad f(x) = x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$$

について、定義域 $-1 \leq x \leq 2$ における $f(x)$ の最小値を m とする。

$m \geq 0$ となる p, q の条件を調べる。

$$(i) \quad -\frac{p}{2} \leq -1, \text{ つまり } p \geq 2 \text{ のとき、}$$

$$m = f(-1) = 1 - p + q$$

$$(ii) \quad -1 \leq -\frac{p}{2} \leq 2, \text{ つまり } -4 \leq p \leq 2 \text{ のとき、}$$

$$m = f\left(-\frac{p}{2}\right) = q - \frac{p^2}{4}$$

$$(iii) \quad 2 \leq -\frac{p}{2}, \text{ つまり } p \leq -4 \text{ のとき、}$$

$$m = f(2) = 4 + 2p + q$$

以上より、

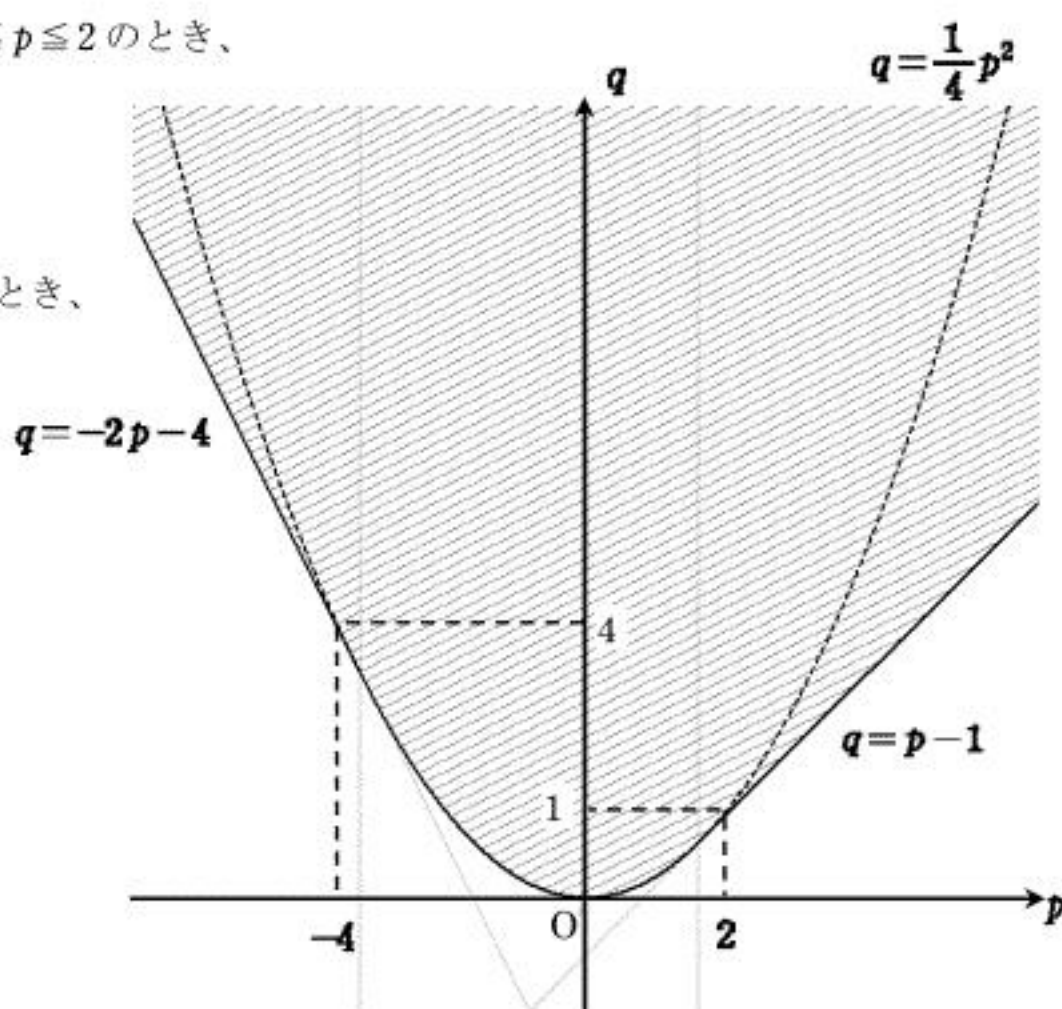
$$p \geq 2 \text{ のとき、 } q \geq p - 1$$

$$-4 \leq p \leq 2 \text{ のとき、 } q \geq \frac{1}{4}p^2$$

$$p \leq -4 \text{ のとき、 } q \geq -2p - 4$$

よって、領域 D は、右図の

斜線部分となる。(境界は含む)



(2) 求める面積を S とすると、

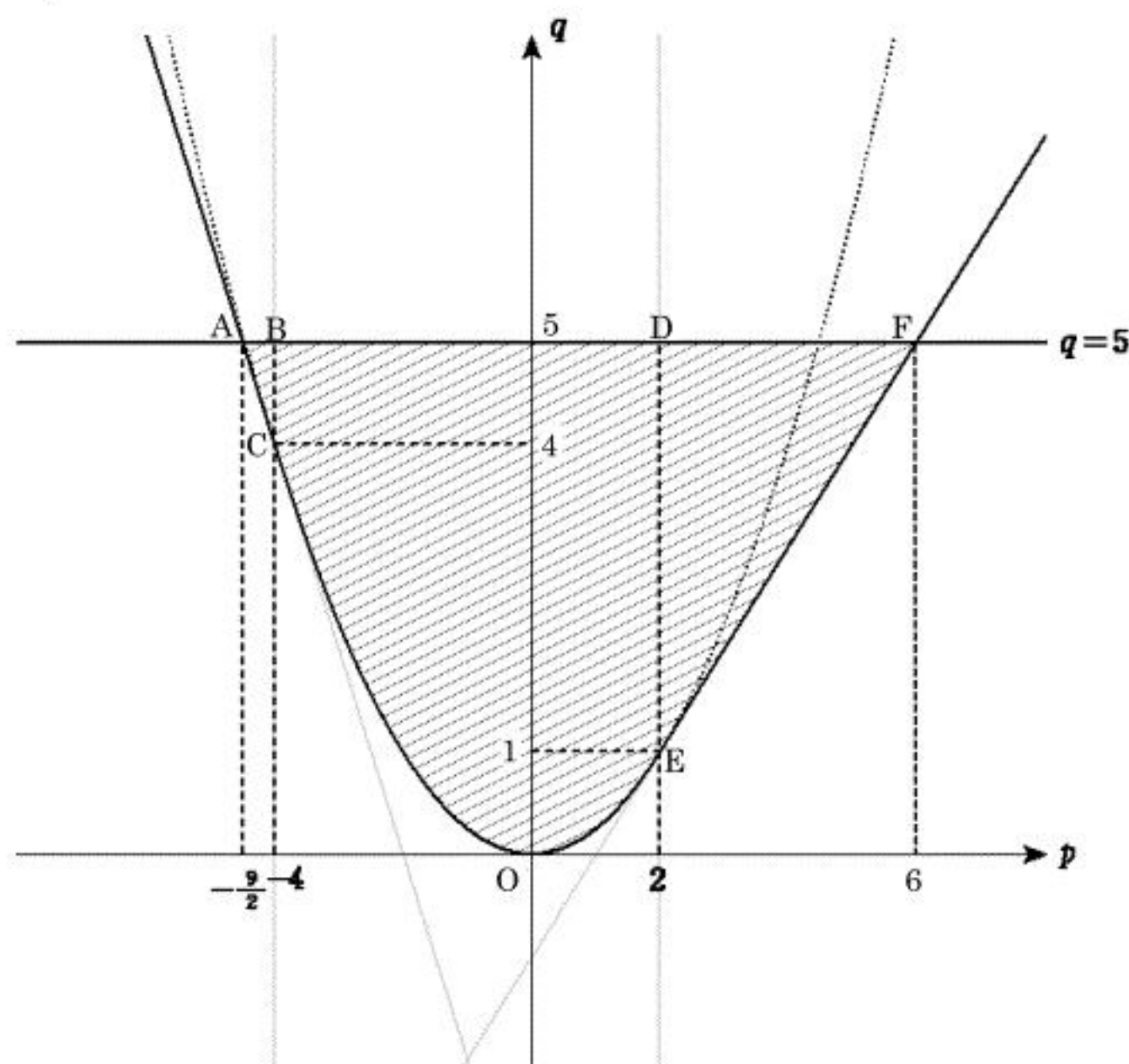
$$A\left(-\frac{9}{2}, 5\right), B(-4, 5), C(-4, 4), D(2, 5), E(2, 1), F(6, 5) \text{ として、}$$

$$S = (\triangle ABC \text{ の面積} + \int_{-4}^2 \left(5 - \frac{1}{4}p^2\right) dp + (\triangle DEF \text{ の面積}))$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \left[5p - \frac{1}{12}p^3\right]_{-4}^2 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4$$

$$= \frac{1}{4} + 5\{2 - (-4)\} - \frac{1}{12}\{2^3 - (-4)^3\} + 8$$

$$= \frac{129}{4} \quad \dots \text{答}$$



③

(1) $2a+1=as+3t \quad \cdots \textcircled{1}$

$a=3b+c$ であり、 $c=2$ のとき、

$$a=3b+2 \quad (b \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

であるから、①は、

$$2(3b+2)+1=(3b+2)s+3t$$

$$3t=(3b+2)(2-s)+1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

ここで

$s \geq 3$ とすると、

$$(3b+2)(2-s)+1 \leq (3b+2)(2-3)+1 = -3b-1 < 0$$

となり、②をみたす負でない整数 t は存在しない。

$s=2$ とすると、②は、

$$3t=1$$

となり、 t が整数であることに反する。

$s=1$ とすると、②は、

$$3t=3b+3$$

$$t=b+1$$

これは条件をみたす。

$s=0$ とすると、②は、

$$3t=6b+5$$

$$t=2b+\frac{5}{3}$$

となり、 t が整数であることに反する。

以上より、①をみたす負でない整数 s, t の組は、

$$s=1, \quad t=b+1 \quad \cdots \text{答}$$

(2) $as+3t=n \quad \cdots \textcircled{3}, \quad n \geq 2a-2 \quad \cdots \textcircled{4}$

について、④をみたすすべての自然数 n に対して、③をみたす負でない整数 s, t が存在することを示す。

u を 0 以上の任意の整数とすると、

$$as+3t=2a-2+u \quad \cdots \textcircled{5}$$

をみたす負でない整数 s, t が存在することを確認する。

⑤で $a=3b+c$ ($c=1$ または $c=2$) とすると、

$$(3b+c)s+3t=2(3b+c)-2+u$$

$$(3b+c)s+3t=6b+2c-2+u \quad \cdots \textcircled{6}$$

(i) $c=1$ のとき、⑥は $(3b+1)s+3t=6b+u \quad \cdots \textcircled{7}$

次に k を負でない整数とする。

(ア) $u=3k$ のとき、⑦は、

$$(3b+1)s+3t=6b+3k$$

これは $s=0, t=2b+k$ を解にもつ。

(イ) $u=3k+1$ のとき、⑦は、

$$(3b+1)s+3t=6b+3k+1$$

これは $s=1, t=b+k$ を解にもつ。

(ウ) $u=3k+2$ のとき、⑦は、

$$(3b+1)s+3t=6b+3k+2$$

これは $s=2, t=k$ を解にもつ。

(ii) $c=2$ のとき、⑥は $(3b+2)s+3t=6b+2+u \quad \cdots \textcircled{8}$

次に l を負でない整数とする。

(ア) $u=3l$ のとき、⑧は、

$$(3b+2)s+3t=6b+2+3l$$

これは $s=1, t=b+l$ を解にもつ。

(イ) $u=3l+1$ のとき、⑧は、

$$(3b+2)s+3t=6b+3+3l$$

これは $s=0, t=2b+1+l$ を解にもつ。

(ウ) $u=3l+2$ のとき、⑧は、

$$(3b+2)s+3t=6b+4+3l$$

これは $s=2, t=l$ を解にもつ。

以上から、④をみたすすべての自然数 n に対して、

③をみたす負でない整数 s, t は存在する。 $\cdots$ 証明終わり

4

(1) 0, 1, 2, 3, 4, 5 の 6 つの数字が書かれたカードの入った箱から、無作為に 3 つの数を選んで取り出したとき、その取り出し方は全部で、

$${}_6C_3 = 20 \text{ (通り)}$$

あり、これらは全て同様に確からしい。

(1) A 君、B 君、いずれであっても、6 枚のカードから 3 枚のカードを取り出したときの得点の可能性は以下のようになる。

0 のカードを取り出したとき

得点	取り出したカード	確率
3	(0,1,2)	$\frac{1}{20}$
4	(0,1,3)	$\frac{1}{20}$
5	(0,1,4),(0,2,3)	$\frac{2}{20}$
6	(0,1,5),(0,2,4)	$\frac{2}{20}$
7	(0,2,5),(0,3,4)	$\frac{2}{20}$
8	(0,3,5)	$\frac{1}{20}$
9	(0,4,5)	$\frac{1}{20}$

0 のカードを取り出さないとき

得点	取り出したカード	確率
2	(1,2,3)	$\frac{1}{20}$
$\frac{7}{3}$	(1,2,4)	$\frac{1}{20}$
$\frac{8}{3}$	(1,2,5),(1,3,4)	$\frac{2}{20}$
3	(1,3,5),(2,3,4)	$\frac{2}{20}$
$\frac{10}{3}$	(1,4,5),(2,3,5)	$\frac{2}{20}$
$\frac{11}{3}$	(2,4,5)	$\frac{1}{20}$
4	(3,4,5)	$\frac{1}{20}$

よって、求める確率は、

(A 君、B 君のうち一方のみが 0 を取り出し、共に 3 点である確率)

+ (A 君、B 君が共に 0 を取り出し、共に 3 点である確率)

$$= \frac{1}{20} \cdot \frac{2}{20} \cdot 2 + \left(\frac{1}{20} \right)^2 = \frac{5}{400} = \frac{1}{80} \quad \cdots \text{答}$$

(2) 求める確率は、

(A 君が $\frac{7}{3}$ 点、B 君が 2 点の確率) + (A 君が $\frac{8}{3}$ 点、B 君が 2 点か $\frac{7}{3}$ 点の確率)

+ (A 君が $\frac{10}{3}$ 点、B 君が 2 点か $\frac{7}{3}$ 点か $\frac{8}{3}$ 点か 3 点の確率)

+ (A 君が $\frac{11}{3}$ 点、B 君が 2 点か $\frac{7}{3}$ 点か $\frac{8}{3}$ 点か 3 点か $\frac{10}{3}$ 点の確率)

$$= \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{20} + \frac{2}{20} \cdot \frac{1+1}{20} + \frac{2}{20} \cdot \frac{1+1+2+(1+2)}{20} + \frac{1}{20} \cdot \frac{1+1+2+(1+2)+2}{20}$$

$$= \frac{7}{100} \quad \cdots \text{答}$$