

①

(1) $l: y = ax + b$ が点 $(-2, 0)$ を通るとき、

$$0 = a(-2) + b$$

より $b = 2a$ である。このとき、

$$l: y = ax + 2a$$

ここで、 $C: y = |x^2 - 4|$ と $l: y = ax + 2a$ がちょうど 3 つの共有点をもつための条件は、 x の方程式

$$|x^2 - 4| = ax + 2a \quad \cdots \textcircled{1}$$

が異なる 3 つの実数解をもつことである。

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow 2a = |x^2 - 4| - ax$$

であるから、 $f(x) = |x^2 - 4| - ax$ とおいたとき、 xy 平面上で、

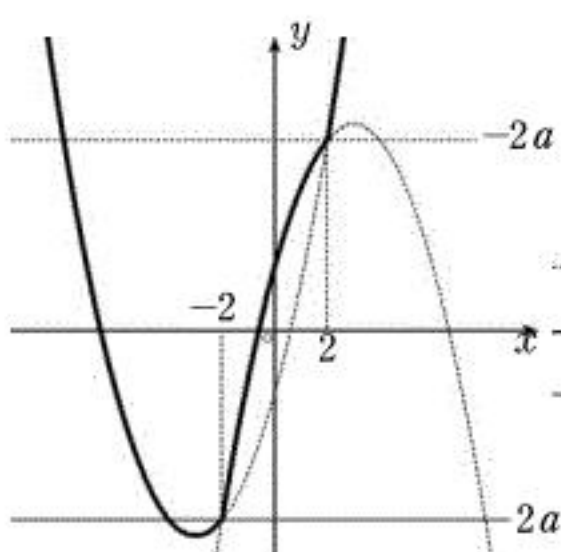
$$y = f(x) \text{ と } y = 2a$$

が異なる 3 つの共有点をもつ条件を考えればよい。ここで、

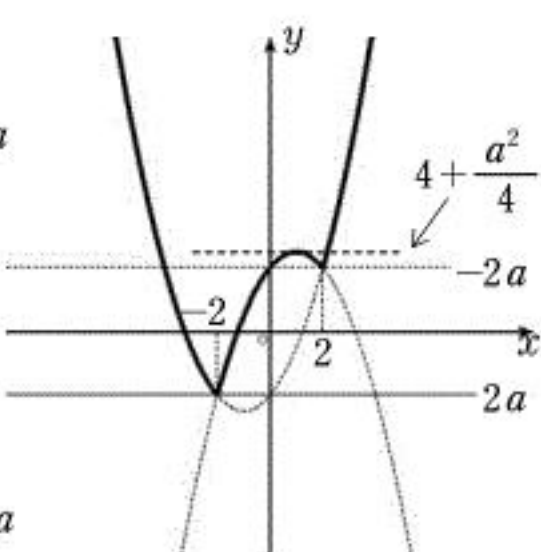
$$f(x) = \begin{cases} \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - 4 - \frac{a^2}{4} & (x \leq -2, 2 \leq x) \\ -\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + 4 + \frac{a^2}{4} & (-2 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

だから、 a の値により $y = f(x)$ のグラフは次のようになる。

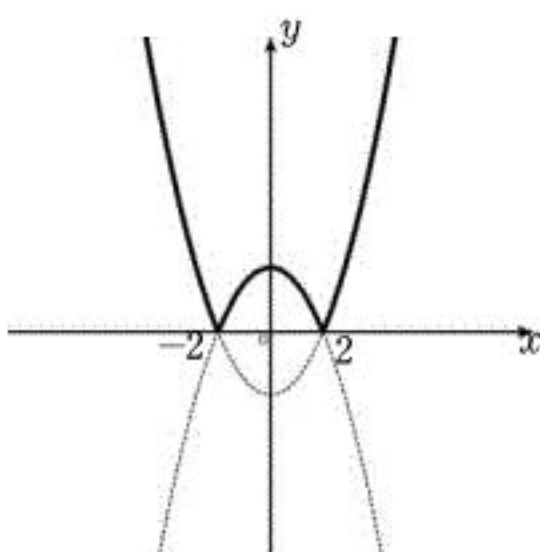
$a \leq -4$ のとき



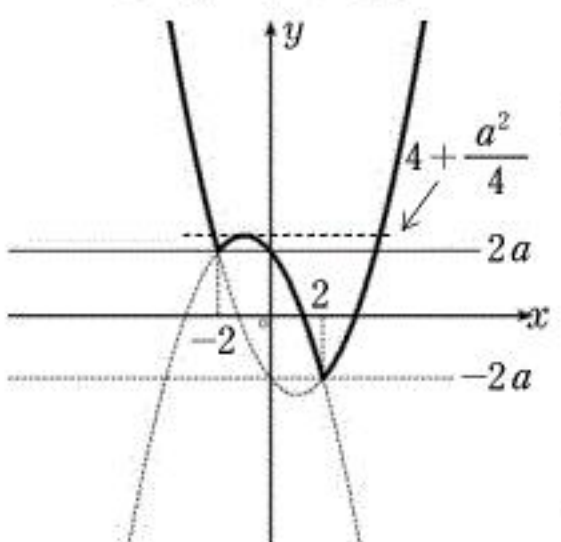
$-4 < a < 0$ のとき



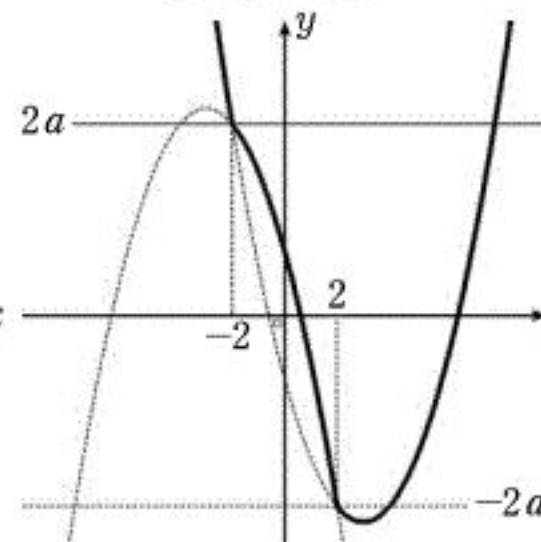
$a = 0$ のとき



$0 < a < 4$ のとき



$4 \leq a$ のとき



$y = f(x)$ と $y = 2a$ が共有点をちょうど 3 つもつのは、

$0 < a < 4$ のとき

のみである。以上より求める条件は、

$$b = 2a \text{ かつ } 0 < a < 4 \quad \cdots \text{答}$$

(2) $y = f(x)$ と $y = b$ の共有点がちょうど 3 つになる条件を求めればよい。

(1) のグラフより、

$-4 < a < 0$ のとき、

$$b = -2a \text{ または } b = 4 + \frac{a^2}{4}$$

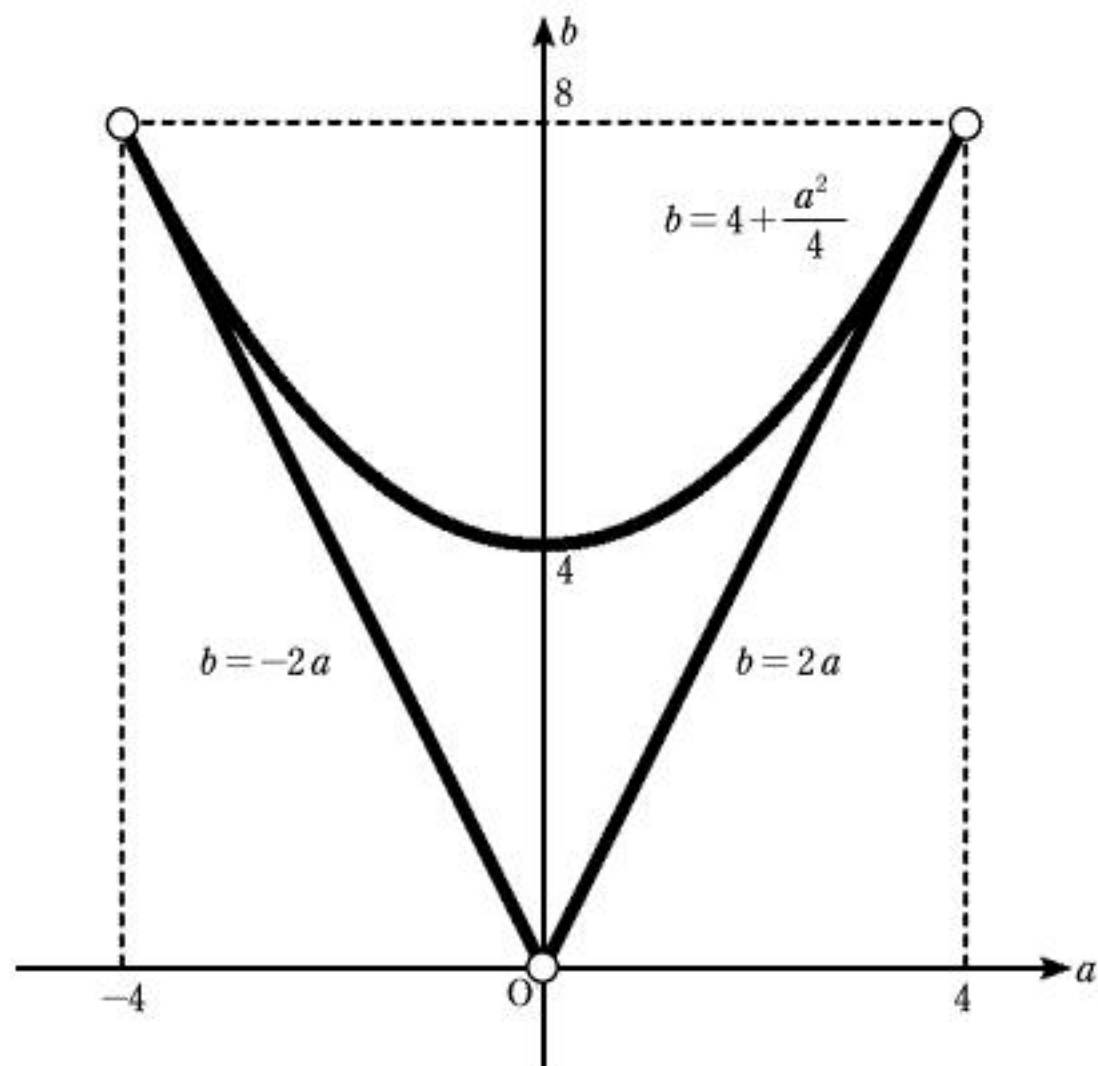
$a = 0$ のとき、

$$b = 4 + \frac{a^2}{4} (= 4)$$

$0 < a < 4$ のとき、

$$b = 2a \text{ または } b = 4 + \frac{a^2}{4}$$

よって、点 (a, b) の軌跡は図のようになる。



ただし、3 点 $(-4, 8)$ 、 $(0, 0)$ 、 $(4, 8)$ は除く。

[2]

(1) 0, 1, 2, 3, 4, 5 の 6 つの数字が書かれたカードの入った箱から、無作為に 3 つの数を選んで取り出したとき、その取り出し方は全部で、

$${}_6C_3 = 20 \text{ (通り)}$$

あり、これらは全て同様に確からしい。

(1) A 君、B 君、いずれであっても、6 枚のカードから 3 枚のカードを取り出したときの得点の可能性は以下ようになる。

0 のカードを取り出したとき

得点	取り出したカード	確率
3	(0,1,2)	$\frac{1}{20}$
4	(0,1,3)	$\frac{1}{20}$
5	(0,1,4),(0,2,3)	$\frac{2}{20}$
6	(0,1,5),(0,2,4)	$\frac{2}{20}$
7	(0,2,5),(0,3,4)	$\frac{2}{20}$
8	(0,3,5)	$\frac{1}{20}$
9	(0,4,5)	$\frac{1}{20}$

0 のカードを取り出さないとき

得点	取り出したカード	確率
2	(1,2,3)	$\frac{1}{20}$
$\frac{7}{3}$	(1,2,4)	$\frac{1}{20}$
$\frac{8}{3}$	(1,2,5),(1,3,4)	$\frac{2}{20}$
3	(1,3,5),(2,3,4)	$\frac{2}{20}$
$\frac{10}{3}$	(1,4,5),(2,3,5)	$\frac{2}{20}$
$\frac{11}{3}$	(2,4,5)	$\frac{1}{20}$
4	(3,4,5)	$\frac{1}{20}$

よって、求める確率は、

$$\begin{aligned} & \text{(A 君、B 君のうち一方のみが 0 を取り出し、共に 3 点である確率)} \\ & + \text{(A 君、B 君が共に 0 を取り出し、共に 3 点である確率)} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{20} \cdot \frac{2}{20} \cdot 2 + \left(\frac{1}{20} \right)^2 = \frac{5}{400} = \frac{1}{80} \quad \cdots \text{答}$$

(2) A 君の得点が B 君の得点より大きい確率(p とする)を求める。

A 君の得点が B 君の得点より大きい確率と、

B 君の得点が A 君の得点より大きい確率は一致する。

よって、A 君の得点と B 君の得点が一致する確率を q とすると、

$$2p + q = 1$$

が成立する。(1)の表で、同じ得点の存在に注意して計算すると、

$$q = \left(\frac{1}{20} \right)^2 \times 5 + \left(\frac{2}{20} \right)^2 \times 6 + \left(\frac{3}{20} \right)^2 \times 1 = \frac{19}{200}$$

だから、

$$p = \frac{1}{2}(1 - q) = \frac{181}{400}$$

次に、A 君の得点が整数でなく、かつ B 君の得点より大きい確率を求める。

表から、

$$\begin{aligned} & \text{(A 君が } \frac{7}{3} \text{ 点、B 君が 2 点の確率)} + \text{(A 君が } \frac{8}{3} \text{ 点、B 君が 2 点か } \frac{7}{3} \text{ 点の確率)} \\ & + \text{(A 君が } \frac{10}{3} \text{ 点、B 君が 2 点か } \frac{7}{3} \text{ 点か } \frac{8}{3} \text{ 点か 3 点の確率)} \\ & + \text{(A 君が } \frac{11}{3} \text{ 点、B 君が 2 点か } \frac{7}{3} \text{ 点か } \frac{8}{3} \text{ 点か 3 点か } \frac{10}{3} \text{ 点の確率)} \\ & = \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{20} + \frac{2}{20} \cdot \frac{1+1}{20} + \frac{2}{20} \cdot \frac{1+1+2+(1+2)}{20} + \frac{1}{20} \cdot \frac{1+1+2+(1+2)+2}{20} \\ & = \frac{7}{100} \end{aligned}$$

以上より求める確率は、

$$\frac{\frac{7}{100}}{\frac{181}{400}} = \frac{28}{181} \quad \cdots \text{答}$$

③

(1) $ax^2+bx+c=0$ …①

について、①の解は、

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

よって、①が有理数解をもつための条件は、 b^2-4ac が平方数であることである。
このとき、 n を負でない整数とすると、

$$b^2-4ac=n^2 \quad \cdots\textcircled{2}$$

が成立する。従って、②をみたす1以上7以下の整数 a,b,c の組を数える。②より、

$$b^2-4ac\geq 0$$

であり、 $b^2\geq 4ac\geq 4\cdot 1\cdot 2=8$ なので、 $b\geq 3$ である。

(i) $b=3$ のとき、②から

$$4ac=9-n^2\geq 8$$

なので、 $n^2\leq 1$ である。 $4ac$ は偶数だから $9-n^2$ も偶数。
よって n は奇数だから $n=1$ のみ考えられる。このとき、

$$ac=2$$

なので、 $(a,c)=(1,2),(2,1)$ の2組。

(ii) $b=4$ のとき、②から

$$4ac=16-n^2\geq 8$$

なので、 $n^2\leq 8$ である。 $4ac$ は偶数だから $16-n^2$ も偶数。
よって n は偶数だから $n=0,2$ のみ考えられる。

(ア) $n=0$ のとき、

$$ac=4$$

なので $(a,c)=(1,4),(2,2),(4,1)$

だが、これらは全て a,b,c が互いに異なることに反する。

(イ) $n=2$ のとき、

$$ac=3$$

なので $(a,c)=(1,3),(3,1)$ の2組。

(iii) $b=5$ のとき、②から

$$4ac=25-n^2\geq 8$$

なので、 $n^2\leq 17$ である。 $4ac$ は偶数だから $25-n^2$ も偶数。
よって n は奇数だから $n=1,3$ のみ考えられる。

(ア) $n=1$ のとき、

$$ac=6$$

なので $(a,c)=(1,6),(2,3),(3,2),(6,1)$ の4組。

(イ) $n=3$ のとき、

$$ac=4$$

なので $(a,c)=(1,4),(2,2),(4,1)$

a,b,c は互いに異なるので、 $(a,c)=(1,4),(4,1)$ の2組

(iv) $b=6$ のとき、②から

$$4ac=36-n^2\geq 8$$

なので、 $n^2\leq 28$ である。 $4ac$ は偶数だから $36-n^2$ も偶数。
よって n は偶数だから $n=0,2,4$ のみ考えられる。

(ア) $n=0$ のとき、

$$ac=9$$

なので $(a,c)=(3,3)$

だが、これは全て a,b,c が互いに異なることに反する。

(イ) $n=2$ のとき、

$$ac=8$$

なので $(a,c)=(2,4),(4,2)$ の2組。

(ウ) $n=4$ のとき、

$$ac=5$$

なので $(a,c)=(1,5),(5,1)$ の2組。

(v) $b=7$ のとき、②から

$$4ac=49-n^2\geq 8$$

なので、 $n^2\leq 41$ である。 $4ac$ は偶数だから $49-n^2$ も偶数。
よって n は奇数だから $n=1,3,5$ のみ考えられる。

(ア) $n=1$ のとき、

$$ac=12$$

なので $(a,c)=(2,6),(3,4),(4,3),(6,2)$ の4組。

(イ) $n=3$ のとき、

$$ac=10$$

なので $(a,c)=(2,5),(5,2)$ の2組。

(ウ) $n=5$ のとき、

$$ac=6$$

なので $(a,c)=(1,6),(2,3),(3,2),(6,1)$ の4組。

以上(i)～(v)より、

$$2+2+6+4+10=24\text{(組)} \quad \cdots\text{答}$$

(2) $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ の値について、(1)の場合分け(i)～(v)の全ての (a,b,c) の組に対して整数値を含むか否かをチェックする。

(i)のとき、

$$\frac{-3\pm 1}{2\cdot 1}, \quad \frac{-3\pm 1}{2\cdot 2} \quad \text{よりすべて適する。}$$

(ii)の(イ)のとき、

$$\frac{-4\pm 2}{2\cdot 1}, \quad \frac{-4\pm 2}{2\cdot 3} \quad \text{よりすべて適する。}$$

(iii)の(ア)のとき、

$$\frac{-5\pm 1}{2\cdot 1}, \quad \frac{-5\pm 1}{2\cdot 2}, \quad \frac{-5\pm 1}{2\cdot 3}, \quad \frac{-5\pm 1}{2\cdot 6} \quad \text{より4つ目のみ不適。}$$

(イ)のとき、

$$\frac{-5\pm 3}{2\cdot 1}, \quad \frac{-5\pm 3}{2\cdot 4} \quad \text{よりすべて適する。}$$

(iv)の(イ)のとき、

$$\frac{-6\pm 2}{2\cdot 2}, \quad \frac{-6\pm 2}{2\cdot 4} \quad \text{よりすべて適する。}$$

(ウ)のとき、

$$\frac{-6\pm 4}{2\cdot 1}, \quad \frac{-6\pm 4}{2\cdot 5} \quad \text{よりすべて適する。}$$

(v)の(ア)のとき、

$$\frac{-7\pm 1}{2\cdot 2}, \quad \frac{-7\pm 1}{2\cdot 3}, \quad \frac{-7\pm 1}{2\cdot 4}, \quad \frac{-7\pm 1}{2\cdot 6} \quad \text{より4つ目のみ不適。}$$

(イ)のとき、

$$\frac{-7\pm 3}{2\cdot 2}, \quad \frac{-7\pm 3}{2\cdot 5} \quad \text{よりすべて適する。}$$

(ウ)のとき、

$$\frac{-7\pm 5}{2\cdot 1}, \quad \frac{-7\pm 5}{2\cdot 2}, \quad \frac{-7\pm 5}{2\cdot 3}, \quad \frac{-7\pm 5}{2\cdot 6} \quad \text{よりすべて適する。}$$

以上より、

$$24-2=22\text{(組)} \quad \cdots\text{答}$$

④

- (1) 点 F は、
 直線 AE 上 …①
 直線 CD 上 …②
 にある。①より、

$$\overrightarrow{AF} = k \overrightarrow{AE} \quad \cdots \textcircled{3}$$

と表せる。ここで点 E は線分 BC を $s:3$ の比に内分する点だから、

$$\overrightarrow{AE} = \frac{3\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}}{s+3}$$

が成立する。これを③へ代入し、 $\overrightarrow{AE}$ を消去すると、

$$\overrightarrow{AF} = \frac{3k}{s+3} \overrightarrow{AB} + \frac{sk}{s+3} \overrightarrow{AC} \quad \cdots \textcircled{4}$$

ここで、条件から $\overrightarrow{AB} = \frac{s+1}{s} \overrightarrow{AD}$ なので、これを④へ代入し、 $\overrightarrow{AB}$ を消去すると、

$$\overrightarrow{AF} = \frac{3k}{s+3} \cdot \frac{s+1}{s} \overrightarrow{AD} + \frac{sk}{s+3} \overrightarrow{AC} \quad \cdots \textcircled{5}$$

が成立。さて、②より、

$$\frac{3k}{s+3} \cdot \frac{s+1}{s} + \frac{sk}{s+3} = 1$$

が成立するので、

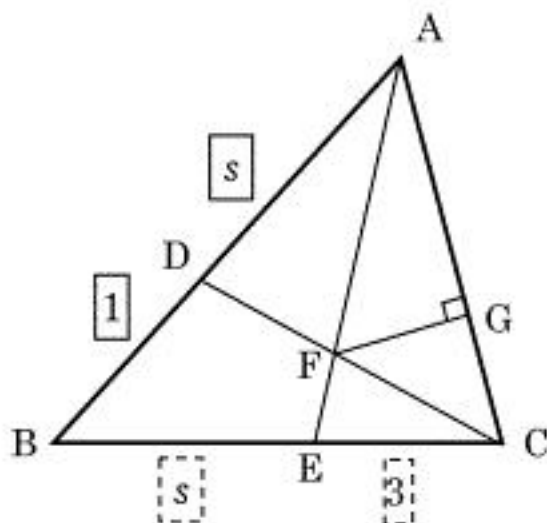
$$k = \frac{s(s+3)}{s^2 + 3s + 3}$$

これを④へ代入することで、

$$\overrightarrow{AF} = \frac{3s}{s^2 + 3s + 3} \overrightarrow{AB} + \frac{s^2}{s^2 + 3s + 3} \overrightarrow{AC}$$

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ は一次独立だから、

$$\alpha = \frac{3s}{s^2 + 3s + 3}, \quad \beta = \frac{s^2}{s^2 + 3s + 3} \quad \cdots \text{答}$$



※③の k の値は、三角形 ABE と直線 DC についてメネラウスの定理を使うと、
 次のように出せる。

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BC}{CE} \cdot \frac{EF}{FA} = 1 \quad \text{から} \quad \frac{s}{1} \cdot \frac{s+3}{3} \cdot \frac{EF}{FA} = 1$$

$$\text{よって} \frac{EF}{FA} = \frac{3}{s(s+3)} \quad \text{なので、} \quad k = \frac{AF}{AE} = \frac{AF}{AF+FE} = \frac{s(s+3)}{s(s+3)+3} = \frac{s(s+3)}{s^2 + 3s + 3}$$

(2) FG の長さが最大となるのは、三角形 AFC の面積が最大となるときに一致する。
 よって、 $\triangle AFC$ の面積が最大となるような s の値を求めればよい。

⑤より、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AF} &= \frac{3(s+1)}{s^2 + 3s + 3} \overrightarrow{AD} + \frac{s^2}{s^2 + 3s + 3} \overrightarrow{AC} \\ &= \frac{3(s+1)\overrightarrow{AD} + s^2 \overrightarrow{AC}}{s^2 + 3(s+1)} \end{aligned}$$

よって点 F は線分 DC を $s^2 : 3(s+1)$ の比に内分する点である。

(これもメネラウスの定理から出しても良い。)

従って、

$$\begin{aligned} \triangle AFC &= \triangle ABC \times \frac{AD}{AB} \times \frac{CF}{CD} \\ &= \triangle ABC \times \frac{s}{1+s} \times \frac{3(s+1)}{s^2 + 3(s+1)} \\ &= \triangle ABC \times \frac{3s}{s^2 + 3s + 3} \end{aligned}$$

ここで $\frac{3s}{s^2 + 3s + 3} = f(s)$ とすると、 $\triangle AFC$ の面積が最大となるのは $f(s)$ が最大となるとき

であり、 $s > 0$ なので、

$$f(s) = \frac{3}{s+3+\frac{3}{s}} \leq \frac{3}{3+2\sqrt{s \cdot \frac{3}{s}}} = \frac{3}{3+2\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} - 3$$

が成立する。(相加平均・相乗平均の大小関係)

等号は $s = \frac{3}{s}$, $s > 0$ より $s = \sqrt{3}$ のとき成立し、このとき $f(s)$ は最大になる。

以上より、FG の長さが最大となるときの s の値は、

$$s = \sqrt{3} \quad \cdots \text{答}$$

⑤

$$(1) \quad z\bar{z} + \alpha z + \beta \bar{z} + \gamma = 0 \quad \cdots (*)$$

について、(*)の両辺の複素共役をとると、

$$\bar{z}z + \bar{\alpha}\bar{z} + \bar{\beta}z + \bar{\gamma} = 0 \quad \cdots ①$$

(*)と①の辺々差をとることで、

$$(\alpha - \bar{\beta})z - (\bar{\alpha} - \beta)\bar{z} + \gamma - \bar{\gamma} = 0 \quad \cdots \text{証明終わり}$$

(2) γ が実数のとき、 $\gamma = \bar{\gamma}$ なので、(1)の結果より、

$$(\alpha - \bar{\beta})z - (\bar{\alpha} - \beta)\bar{z} = 0$$

が成立する。よって、

$$\begin{aligned} (\alpha - \bar{\beta})z &= (\bar{\alpha} - \beta)\bar{z} \\ &= \overline{(\alpha - \bar{\beta})z} \end{aligned}$$

だから、 $(\alpha - \bar{\beta})z$ は実数である。つまり、 k を実数の定数として、

$$(\alpha - \bar{\beta})z = k \quad \cdots ②$$

と表せる。

(i) $\alpha - \bar{\beta} = 0$ のとき、

$\bar{\alpha} - \beta = 0$ であるから(*)で β を消去すると、

$$z\bar{z} + \alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + \gamma = 0$$

$$(z + \bar{\alpha})(\bar{z} + \alpha) = \alpha\bar{\alpha} - \gamma$$

$$|z + \bar{\alpha}|^2 = |\alpha|^2 - \gamma$$

ここで $\gamma < 0$ なので $|\alpha|^2 - \gamma > 0$ だから、

$$|z - (-\bar{\alpha})| = \sqrt{|\alpha|^2 - \gamma}$$

が成立する。これは点 $-\bar{\alpha}$ を中心とする半径 $\sqrt{|\alpha|^2 - \gamma}$ の円を表す。

従って、(*)をみたす z は無数にあり、題意の条件をみたさない。

(ii) $\alpha - \bar{\beta} \neq 0$ のとき、②より、

$$z = \frac{k}{\alpha - \bar{\beta}}$$

であり、これを(*)へ代入して z を消去すると、

$$\frac{k}{\alpha - \bar{\beta}} \overline{\left(\frac{k}{\alpha - \bar{\beta}} \right)} + \alpha \frac{k}{\alpha - \bar{\beta}} + \beta \overline{\left(\frac{k}{\alpha - \bar{\beta}} \right)} + \gamma = 0$$

$$\frac{k^2}{(\alpha - \bar{\beta})(\bar{\alpha} - \beta)} + \alpha \frac{k}{\alpha - \bar{\beta}} + \beta \frac{k}{\bar{\alpha} - \beta} + \gamma = 0$$

$$k^2 + \alpha k(\bar{\alpha} - \beta) + \beta k(\alpha - \bar{\beta}) + \gamma(\alpha - \bar{\beta})(\bar{\alpha} - \beta) = 0$$

$$k^2 + (|\alpha|^2 - |\beta|^2)k = -\gamma|\alpha - \bar{\beta}|^2$$

ここで $|\alpha| = |\beta|$ だから、

$$k^2 = -\gamma|\alpha - \bar{\beta}|^2 \quad \cdots ③$$

$\gamma < 0$ 、 $\alpha - \bar{\beta} \neq 0$ なので、③の式の右辺は正であるから、

③をみたす実数 k の値は異なる 2 つ存在する。それぞれの k の値に対して、

$$z = \frac{k}{\alpha - \bar{\beta}}$$

として決まる z の値は異なり、共に(*)をみたす。

以上から、求める条件は、

$$\alpha \neq \bar{\beta} \quad \cdots \text{答}$$

$$(1) \quad a \neq 0, \quad I(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax} \cos bx \, dx, \quad J(a, b, c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax} \sin bx \sin cx \, dx$$

について、

$$\begin{aligned} I(a, b) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{a} e^{ax} \right)' \cos bx \, dx \\ &= \left[\frac{1}{a} e^{ax} \cos bx \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a} e^{ax} \cdot (-b \sin bx) \, dx \\ &= \frac{1}{a} e^{\frac{\pi}{2}a} \cos \left(\frac{\pi}{2} b \right) - \frac{1}{a} e^0 \cos 0 \\ &\quad + \frac{b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax} \sin bx \, dx \\ &= \frac{1}{a} e^{\frac{\pi}{2}a} \cos \left(\frac{\pi}{2} b \right) - \frac{1}{a} \\ &\quad + \frac{b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{a} e^{ax} \right)' \sin bx \, dx \\ &= \frac{1}{a} e^{\frac{\pi}{2}a} \cos \left(\frac{\pi}{2} b \right) - \frac{1}{a} \\ &\quad + \frac{b}{a} \left\{ \left[\frac{1}{a} e^{ax} \sin bx \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a} e^{ax} \cdot b \cos bx \, dx \right\} \\ &= \frac{1}{a} e^{\frac{\pi}{2}a} \cos \left(\frac{\pi}{2} b \right) - \frac{1}{a} \\ &\quad + \frac{b}{a} \left\{ \frac{1}{a} e^{\frac{\pi}{2}a} \sin \left(\frac{\pi}{2} b \right) - \frac{1}{a} e^0 \sin 0 - \frac{b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax} \cos bx \, dx \right\} \\ &= \frac{1}{a} e^{\frac{\pi}{2}a} \cos \left(\frac{\pi}{2} b \right) - \frac{1}{a} + \frac{b}{a^2} e^{\frac{\pi}{2}a} \sin \left(\frac{\pi}{2} b \right) - \left(\frac{b}{a} \right)^2 I(a, b) \end{aligned}$$

よって、

$$I(a, b) = \frac{1}{a^2 + b^2} \left(e^{\frac{\pi}{2}a} \left\{ a \cos \left(\frac{\pi}{2} b \right) + b \sin \left(\frac{\pi}{2} b \right) \right\} - a \right) \quad \cdots \text{答}$$

$$(2) \quad J(a, b, c)$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax} \sin bx \sin cx \, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax} \cdot \frac{1}{2} \{ \cos(b-c)x - \cos(b+c)x \} \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax} \cos(b-c)x \, dx - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax} \cos(b+c)x \, dx \\ &= \frac{1}{2} I(a, b-c) - \frac{1}{2} I(a, b+c) \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$

$$(3) \quad 4e^t \sin tx \sin 2tx \cos 3tx \cos 4tx$$

$$\begin{aligned} &= e^t \cdot 2 \sin tx \cos 4tx \cdot 2 \sin 2tx \cos 3tx \\ &= e^t \cdot \{ \sin(t+4t)x + \sin(t-4t)x \} \{ \sin(2t+3t)x + \sin(2t-3t)x \} \\ &= e^t (\sin 5tx - \sin 3tx)(\sin 5tx - \sin tx) \\ &= e^t (\sin^2 5tx - \sin 5tx \sin tx - \sin 5tx \sin 3tx + \sin 3tx \sin tx) \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} &8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \sin tx \sin 2tx \cos 3tx \cos 4tx \, dx \\ &= 2 \{ J(1, 5t, 5t) - J(1, 5t, t) - J(1, 5t, 3t) + J(1, 3t, t) \} \\ &= I(1, 5t-5t) - I(1, 5t+5t) \\ &\quad - \{ I(1, 5t-t) - I(1, 5t+t) \} \\ &\quad - \{ I(1, 5t-3t) - I(1, 5t+3t) \} \\ &\quad + I(1, 3t-t) - I(1, 3t+t) \\ &= I(1, 0) - 2I(1, 4t) + I(1, 6t) \\ &\quad + I(1, 8t) - I(1, 10t) \end{aligned}$$

ここで、 k を 0 でない整数とすると、

$$\begin{aligned} I(1, kt) &= \frac{1}{1+k^2 t^2} \left(e^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{2} kt \right) + kt \sin \left(\frac{\pi}{2} kt \right) \right\} - 1 \right) \\ &= e^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} kt \right)}{1+k^2 t^2} + e^{\frac{\pi}{2}} \frac{kt \sin \left(\frac{\pi}{2} kt \right)}{1+k^2 t^2} - \frac{1}{1+k^2 t^2} \end{aligned}$$

ここで、 $-1 \leq \cos \left(\frac{\pi}{2} kt \right) \leq 1$, $-1 \leq \sin \left(\frac{\pi}{2} kt \right) \leq 1$ だから、

$$-\frac{1}{1+k^2 t^2} \leq \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} kt \right)}{1+k^2 t^2} \leq \frac{1}{1+k^2 t^2}, \quad -\frac{|kt|}{1+k^2 t^2} \leq \frac{kt \sin \left(\frac{\pi}{2} kt \right)}{1+k^2 t^2} \leq \frac{|kt|}{1+k^2 t^2}$$

であり、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{1+k^2 t^2} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|kt|}{1+k^2 t^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{|kt|} + |kt|} = 0$$

なので、 $k \neq 0$ のとき、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(1, kt) = 0$$

以上から、

$$\begin{aligned} &\lim_{t \rightarrow \infty} 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \sin tx \sin 2tx \cos 3tx \cos 4tx \, dx \\ &= I(1, 0) \\ &= \frac{1}{1^2 + 0^2} \left(e^{\frac{\pi}{2} \cdot 1} \left\{ 1 \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} \cdot 0 \right) + 0 \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} \cdot 0 \right) \right\} - 1 \right) \\ &= e^{\frac{\pi}{2}} - 1 \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$