

①

(1) $C: y = (x-a)^2 + b$, $D: y = -x^2$
 について、 C と D が異なる2点で交わる時、

$$(x-a)^2 + b = -x^2$$

つまり、

$$2x^2 - 2ax + a^2 + b = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

は異なる2つの実数解をもつから、

$$a^2 - 2(a^2 + b) > 0$$

つまり、 $b < -\frac{a^2}{2} \quad \cdots \textcircled{2}$

が成立する。このとき、①の2解を α, β とすると、

$$\alpha + \beta = a, \quad \alpha\beta = \frac{a^2 + b}{2}$$

を満たす。 C と D の2交点の x 座標の差が1であるとき、

$$|\alpha - \beta| = 1$$

だから、

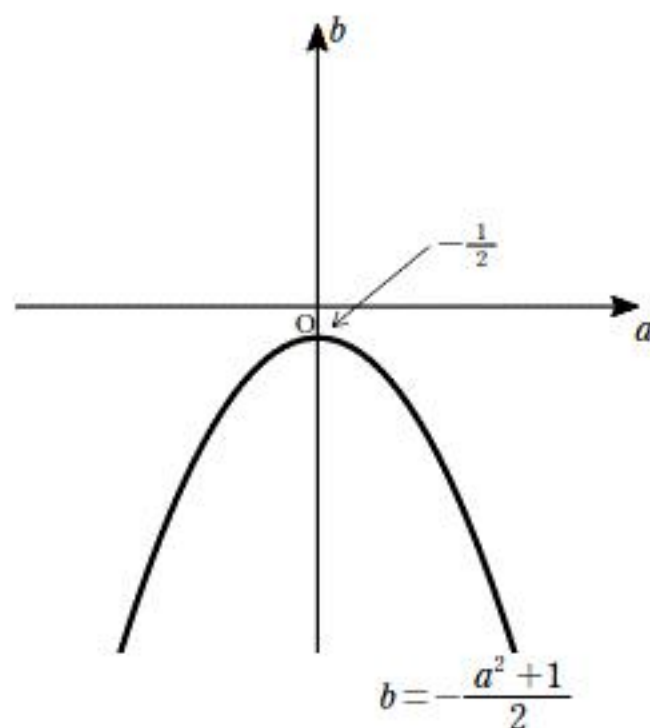
$$(\alpha - \beta)^2 = 1$$

$$(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 1$$

$$a^2 - 2(a^2 + b) = 1$$

$$b = -\frac{a^2 + 1}{2} \quad \left(< -\frac{a^2 + 0}{2} \right)$$

これは②をみたす。以上から C の頂点 (a, b) の軌跡は右図のような放物線となる。 …答



(2) a, b が(1)の条件をみたすとき、

$$(x-a)^2 + b - y + k(x^2 + y) = 0$$

は、 C と D の2交点を通る曲線である。 $k = -1$ とすると、

$$(x-a)^2 + b - y - x^2 - y = 0$$

$$y = -ax + \frac{a^2 + b}{2}$$

$$= -ax + \frac{a^2 - 1}{4} \quad ((1)より) \quad \cdots \textcircled{3}$$

これが C と D の2交点を通る直線である。これと $y = -x^2 - \frac{1}{4}$ とで y を消去すると、

$$-ax + \frac{a^2 - 1}{4} = -x^2 - \frac{1}{4}$$

$$x^2 - ax + \frac{a^2}{4} = 0$$

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = 0$$

$$x = \frac{a}{2}$$

よって、③は放物線 $y = -x^2 - \frac{1}{4}$ に点 $\left(\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{4} - \frac{1}{4}\right)$ で接する。 …証明終わり

②

(1) $p(1)$: ちょうど1回目の試行で和がはじめて n 以上となる確率について、これは1回目に n を取り出す確率に等しいから、

$$p(1) = \frac{1}{n} \quad \dots \text{答}$$

$p(n)$: ちょうど n 回目の試行で和がはじめて n 以上となる確率について、これは1回目から $n-1$ 回目まで全て1を取り出す確率(n 回目はどの札でも良い)に等しいから、

$$p(n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1} \cdot 1 = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1} \quad \dots \text{答}$$

(2) $p(2)$: ちょうど2回目の試行で和がはじめて n 以上となる確率について、1回目に取り出す札を k ($1 \leq k \leq n-1$) とするとき、2回目に $n-k$ 以上 n 以下の札を取り出せばよい。よって、

$$\begin{aligned} p(2) &= \frac{\sum_{k=1}^{n-1} \{n - (n-k) + 1\}}{n^2} \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) \\ &= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{(n-1)\{2 + (n-1) + 1\}}{2} \\ &= \frac{(n-1)(n+2)}{2n^2} \quad \dots \text{答} \end{aligned}$$

(3) $p(n-1)$: ちょうど $n-1$ 回目の試行で和がはじめて n 以上となる確率について、 $n \geq 3$ で考える。すると、

- (i) $n-2$ 回目まで全て1の札を取り出し、 $n-1$ 回目に2以上の札を取り出す確率
- (ii) $n-2$ 回目までで、2の札を1回だけ取り出し、残り $n-3$ 回は全て1の札を取り出す。

そして、 $n-1$ 回目には1以上の任意の札を取り出す確率の和に等しい。

(i) の確率は、

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{n-2} \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{n^{n-1}}$$

(ii) の確率は、

$${}_{n-2}C_1 \left(\frac{1}{n}\right)^1 \left(\frac{1}{n}\right)^{n-3} \cdot 1 = \frac{n-2}{n^{n-2}}$$

以上の和より、

$$\begin{aligned} p(n-1) &= \frac{n-1}{n^{n-1}} + \frac{n-2}{n^{n-2}} \\ &= \frac{n-1+n(n-2)}{n^{n-1}} \\ &= \frac{n^2-n-1}{n^{n-1}} \quad \dots \text{①} \end{aligned}$$

さて、 $n=2$ のとき、(1) の結果から、

$$p(n-1) = p(1) = \frac{1}{2}$$

であるが、①は $\frac{2^2-2-1}{2^1} = \frac{1}{2}$ となり、一致する。以上から、

$$p(n-1) = \frac{n^2-n-1}{n^{n-1}} \quad (n \geq 2) \quad \dots \text{答}$$

③

(1) $x < 4$ のとき、

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4x \\ y = ax \end{cases}$$

より y を消去すると、

$$-x^2 + 4x = ax$$

$$x\{x - (4 - a)\} = 0$$

$$x = 0, 4 - a \quad \cdots \textcircled{1}$$

$0 < a < 4$ だから $0 < 4 - a < 4$ なので、①はすべて $x < 4$ をみたす。

同様に、 $x \geq 4$ のとき、

$$\begin{cases} y = 9a(x - 4) \\ y = ax \end{cases}$$

より y を消去すると、

$$9a(x - 4) = ax$$

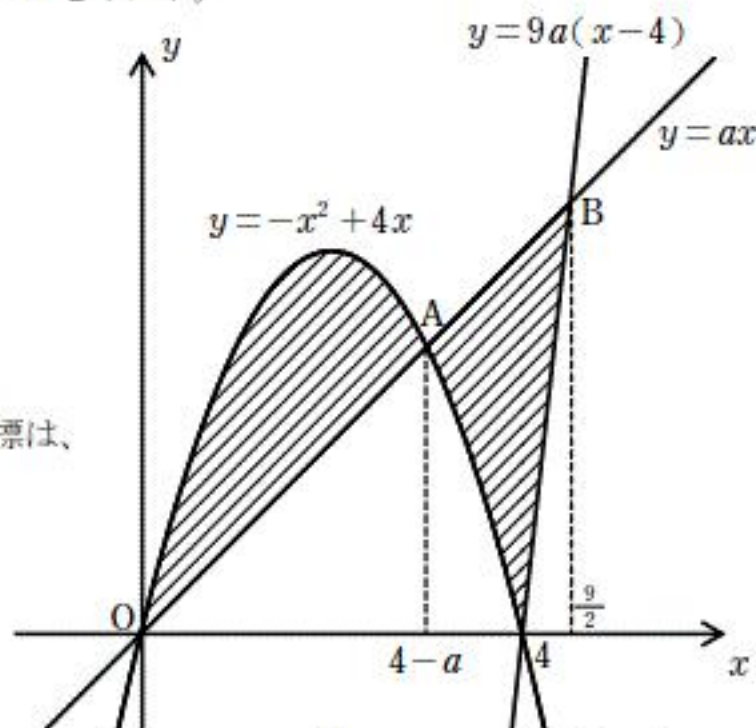
$$a(8x - 36) = 0$$

$a \neq 0$ より、

$$x = \frac{9}{2}$$

これは $x \geq 4$ をみたす。以上から、求める交点の座標は、

$$(0, 0), (4 - a, 4a - a^2), \left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}a\right) \quad \cdots \text{答}$$



(2) $A(4 - a, 4a - a^2)$, $B\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}a\right)$ とする。

(1)の結果より、右上のようなグラフとなる。

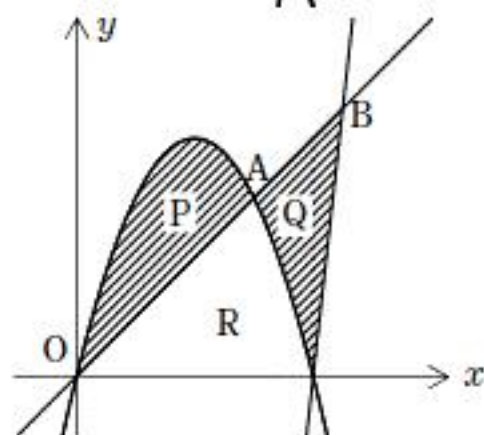
よって、右下図のように P , Q , R を定めると、

$$S(a) = P + Q$$

$$= P + (Q + R) - \{(P + R) - P\}$$

$$= \int_0^{4-a} [-x\{x - (4 - a)\}] dx + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{9}{2}a$$

$$- \left\{ \int_0^4 [-x(x - 4)] dx - \int_0^{4-a} [-x\{x - (4 - a)\}] dx \right\}$$



$$= -2 \int_0^{4-a} x\{x - (4 - a)\} dx + 9a + \int_0^4 x(x - 4) dx$$

$$= (-2) \left\{ -\frac{1}{6} \right\} \{(4 - a) - 0\}^3 + 9a + \left\{ -\frac{1}{6} \right\} (4 - 0)^3$$

$$= -\frac{1}{3}a^3 + 4a^2 - 7a + \frac{32}{3} \quad \cdots \text{答}$$

(3) $S'(a) = -a^2 + 8a - 7$

$$= -(a - 1)(a - 7)$$

より $S(a)$ の増減は右のようになる。

従って、 $S(a)$ は $a = 1$ で極小かつ最小となり、

最小値は、

$$S(1) = \frac{22}{3} \quad \cdots \text{答}$$

a	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	(4)
$S'(a)$		-	0	+	
$S(a)$		$\searrow$		$\nearrow$	

4

$$(1) \quad \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + (t-2)\overrightarrow{GC} + t\overrightarrow{GD} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DG} + (t-2)(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DG}) + t(-\overrightarrow{DG}) = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + (t-2)\overrightarrow{DC} - 2t\overrightarrow{DG} = \vec{0}$$

$t \neq 0$ だから、

$$\overrightarrow{DG} = \frac{1}{2t}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2t}\overrightarrow{DB} + \frac{t-2}{2t}\overrightarrow{DC} \quad \cdots \text{答}$$

(2) 点 G が点 N と一致するとき、

$$\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DN}$$

が成立する。

$$\overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$$

なので、(1)の結果とで、

$$\frac{1}{2t}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2t}\overrightarrow{DB} + \frac{t-2}{2t}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$$

となるが、 $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ は一次独立であるから、

$$\frac{1}{2t} = \frac{1}{2t} = 0, \quad \frac{t-2}{2t} = \frac{1}{2}$$

が成立する。しかし、これらをみたす実数 t は存在せず、不適。

よって、点 G は点 N と一致しない。 $\cdots$ 証明終わり

$$(3) \quad \overrightarrow{NG} = \overrightarrow{DG} - \overrightarrow{DN}$$

$$= \frac{1}{2t}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2t}\overrightarrow{DB} + \frac{t-2}{2t}\overrightarrow{DC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$$

$$= \frac{1}{2t}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} - 2\overrightarrow{DC})$$

$$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DM}$$

$$= \overrightarrow{DC} - \frac{\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} - 2\overrightarrow{DC})$$

よって、

$$\overrightarrow{MC} = -t\overrightarrow{NG}$$

が成立するので、 $t \neq 0$ であることとて、

$$MC \parallel NG$$

である。 $\cdots$ 証明終わり

