

①

$$(1) \quad C: y = (x-a)^2 + b, \quad D: y = -x^2$$

について、 C と D が異なる2点で交わる時、

$$(x-a)^2 + b = -x^2$$

つまり、

$$2x^2 - 2ax + a^2 + b = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

は異なる2つの実数解をもつから、

$$a^2 - 2(a^2 + b) > 0$$

$$\text{つまり、} b < -\frac{a^2}{2} \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成立する。このとき、①の2解を α, β とすると、

$$\alpha + \beta = a, \quad \alpha\beta = \frac{a^2 + b}{2}$$

を満たす。 C と D の2交点の x 座標の差が1であるとき、

$$|\alpha - \beta| = 1$$

だから、

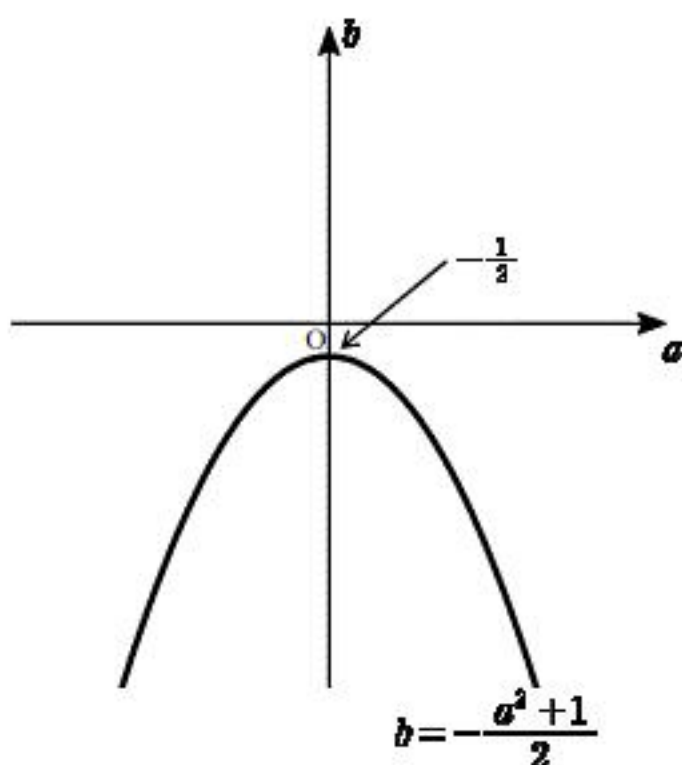
$$(\alpha - \beta)^2 = 1$$

$$(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 1$$

$$a^2 - 2(a^2 + b) = 1$$

$$b = -\frac{a^2 + 1}{2} \quad \left(< -\frac{a^2 + 0}{2} \right)$$

これは②をみたす。以上から C の頂点 (a, b) の軌跡は右図のような放物線となる。 …答



(2) a, b が(1)の条件をみたすとき、

$$(x-a)^2 + b - y + k(x^2 + y) = 0$$

は、 C と D の2交点を通る曲線である。 $k = -1$ とすると、

$$(x-a)^2 + b - y - x^2 - y = 0$$

$$y = -ax + \frac{a^2 + b}{2}$$

これが C と D の2交点を通る直線である。(1)の結果より $b = -\frac{a^2 + 1}{2}$ を代入して b を消去すると、

$$a^2 - 4xa - 1 - 4y = 0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

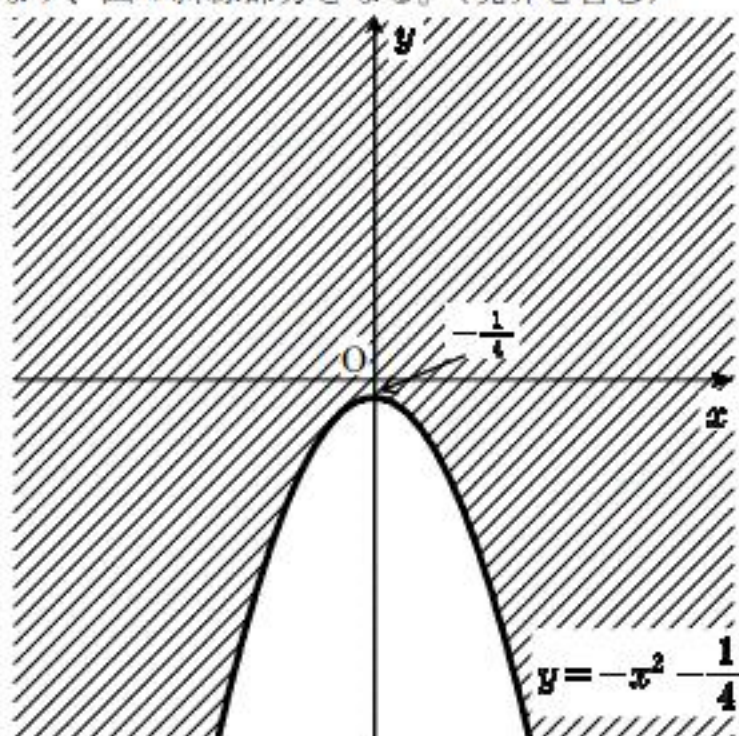
求める通過領域は、③をみたす実数 a が存在するような点 (x, y) の存在領域に一致する。

よって、

$$(-2x)^2 - (-1 - 4y) \geq 0$$

$$y \geq -x^2 - \frac{1}{4}$$

となり、図の斜線部分となる。(境界を含む)



②

(1) $p(1)$: ちょうど1回目の試行で和がはじめて n 以上となる確率について、これは1回目に n を取り出す確率に等しいから、

$$p(1) = \frac{1}{n} \quad \cdots \text{答}$$

$p(n)$: ちょうど n 回目の試行で和がはじめて n 以上となる確率について、これは1回目から $n-1$ 回目まで全て1を取り出す確率(n 回目はどの札でも良い)に等しいから、

$$p(n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1} \cdot 1 = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1} \quad \cdots \text{答}$$

(2) $p(2)$: ちょうど2回目の試行で和がはじめて n 以上となる確率について、1回目に取り出す札を k ($1 \leq k \leq n-1$)とすると、2回目に $n-k$ 以上 n 以下の札を取り出せばよい。よって、

$$\begin{aligned} p(2) &= \frac{\sum_{k=1}^{n-1} \{n - (n-k) + 1\}}{n^2} \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) \\ &= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{(n-1)\{2 + (n-1) + 1\}}{2} \\ &= \frac{(n-1)(n+2)}{2n^2} \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$

(3) $n \geq 3$ のとき、
 $p(3)$: ちょうど3回目の試行で和がはじめて n 以上となる確率について、

1回目、2回目に取り出す札の数の和を k ($2 \leq k \leq n-1$) $\cdots$ ①
とすると、3回目に $n-k$ 以上 n 以下の札を取り出せばよい。

①について、和が k となる2数の組は、
(1, $k-1$), (2, $k-2$), $\cdots$, ($k-1$, 1)

の $k-1$ 通りあるから、求める確率は、

$$\begin{aligned} p(3) &= \frac{\sum_{k=1}^{n-1} (k-1)\{n - (n-k) + 1\}}{n^3} \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} (k^2 - 1) \\ &= \frac{1}{n^3} \left\{ \frac{1}{6} n(n-1)(2n-1) - (n-1) \right\} \\ &= \frac{(n-1)(n-2)(2n+3)}{6n^3} \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$

[3]

$$3^a - 2^b = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$(1) \quad 3^a = 2^b + 1 > 1 = 3^0$$

より $a > 0$ である。 a は整数だから、 $a \geq 1$ である。また、

$$2^b = 3^a - 1 \geq 3^1 - 1 = 2^1$$

だから $b \geq 1$ である。以上より、 a, b は共に正である。 $\cdots$ 証明終わり

(2) $b > 1$ のとき、 b は整数なので $b \geq 2$ であり、

$$\begin{aligned} 2^b &= 3^a - 1 \\ &= 3^a - 1^a \\ &= (3-1)(3^{a-1} + 3^{a-2} + \cdots + 3^1 + 1) \end{aligned}$$

よって、

$$2^{b-1} = 3^{a-1} + 3^{a-2} + \cdots + 3^1 + 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$b \geq 2$ のとき左辺は偶数である。よって、右辺も偶数でなければならない。

ここで、 a 個の整数 $3^{a-1}, 3^{a-2}, \dots, 3^1, 1$ は全て奇数であるから、

a を奇数とすると、②の右辺は奇数となり、不適。

以上から、 $b > 1$ のとき、 a は偶数である。 $\cdots$ 証明終わり

(3) $b = 1$ のとき、①より $3^a = 3$ から $a = 1$ である。以下、 $b \geq 2$ とする。

すると、(2)の結果より、 a は偶数であるから、

$$a = 2c \quad (c \text{ は自然数})$$

とおけて、 $3^{2c} - 2^b = 1$ から、

$$\begin{aligned} 2^b &= 3^{2c} - 1 \\ &= (3^c)^2 - 1^2 \\ &= (3^c - 1)(3^c + 1) \end{aligned}$$

ここで、 $3^c - 1, 3^c + 1$ は共に偶数であり、 $2 \leq 3^c - 1 < 3^c + 1$ なので、

$$\begin{aligned} 3^c - 1 &= 2^d \\ 3^c + 1 &= 2^e \quad (d \text{ は整数で、} 1 \leq d < e) \end{aligned}$$

とおける。2式の差を取ることで、

$$2 = 2^e - 2^d = 2^d (2^{e-d} - 1)$$

$e - d \geq 2$ とすると $2^{e-d} - 1$ は 3 以上の奇数になるので、不適。

よって $e - d \leq 1$ であり、 $0 < e - d$ とで $e - d = 1$ となる。このとき、

$$2 = 2^d$$

から $d = 1$ となり、従って $e = 2$ である。すると、

$$3^c = 3$$

から $c = 1$ となり、 $a = 2$ である。また、

$$2^b = 8$$

より $b = 3$ となる。

以上より、求める整数の組は、

$$(a, b) = (1, 1), (2, 3) \quad \cdots \text{答}$$

[4]

(1) $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$ とする。三角形の内接円(中心を I)と辺 BC の接点を D とするとき、
 $BD \tan \beta = r$, $CD \tan \gamma = r$

が成立するから、

$$BC = BD + CD = a$$

より、

$$\frac{r}{\tan \beta} + \frac{r}{\tan \gamma} = a$$

$$r = \frac{\tan \beta \tan \gamma}{\tan \beta + \tan \gamma} a \quad \cdots \textcircled{1}$$

ここで三角形 ABC について正弦定理より、

$$a = 2R \sin 2\alpha$$

だから、これを①へ代入して a を消去すると、

$$r = \frac{\tan \beta \tan \gamma}{\tan \beta + \tan \gamma} \cdot 2R \sin 2\alpha$$

$$\frac{r}{R} = \frac{\frac{\sin \beta}{\cos \beta} \cdot \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma}}{\frac{\sin \beta}{\cos \beta} + \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma}} \cdot 4 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$= \frac{\sin \beta \sin \gamma}{\sin \beta \cos \gamma + \sin \gamma \cos \beta} \cdot 4 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$= 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin(\beta + \gamma)}$$

ここで $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = \pi$ だから、 $\beta + \gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha$ より、

$$\sin(\beta + \gamma) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

従って、

$$h = \frac{r}{R} = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \quad \cdots \text{証明終わり}$$

※ 三角形 ABC の面積を S とし、 $S = \frac{r}{2}(a+b+c)$, $S = \frac{1}{2}bc \sin 2\alpha$ から S を消去して、

$$\frac{r}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}bc \sin 2\alpha$$

正弦定理より、 $a = 2R \sin 2\alpha$, $b = 2R \sin 2\beta$, $c = 2R \sin 2\gamma$ だから、

$$r(2R \sin 2\alpha + 2R \sin 2\beta + 2R \sin 2\gamma) = 2R \sin 2\beta \cdot 2R \sin 2\gamma \sin 2\alpha$$

$$\frac{r}{R} = \frac{2 \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma}$$

$$= 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \cdot \frac{4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma}$$

そして $\frac{4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma} = 1$ を示すことでもできる。(計算過程が多く、面倒)

(2) 三角形 ABC が直角三角形のときを考える。 $\angle C = 2\gamma = \frac{\pi}{2}$ として考えても一般性を失わない。

$\gamma = \frac{\pi}{4}$ だから $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ であり、このとき、

$$\begin{aligned} h &= 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \frac{\pi}{4} \\ &= 2\sqrt{2} \sin \alpha \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \\ &= 2\sqrt{2} \sin \alpha \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{4} \sin \alpha\right) \\ &= 2 \sin \alpha (\cos \alpha - \sin \alpha) \\ &= \sin 2\alpha - 2 \cdot \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \\ &= \sin 2\alpha + \cos 2\alpha - 1 \\ &= \sqrt{2} \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - 1 \leq \sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

ここで等号は $2\alpha + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ のとき、つまり $\alpha = \frac{\pi}{8}$ のとき成立し、

$$\angle A = 2\alpha = \frac{\pi}{4}, \quad \angle B = 2\beta = \frac{\pi}{4}, \quad \angle C = 2\gamma = \frac{\pi}{2}$$

から三角形 ABC は直角二等辺三角形である。 …答

(3) $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \leq \frac{1}{8}$ を示せばよい。

$$\begin{aligned} &\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \\ &= -\frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \} \sin \gamma \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) - \cos(\alpha - \beta) \right\} \sin \gamma \\ &= -\frac{1}{2} \{ \sin \gamma - \cos(\alpha - \beta) \} \sin \gamma \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ \sin \gamma - \frac{\cos(\alpha - \beta)}{2} \right\}^2 + \frac{1}{8} \cos^2(\alpha - \beta) \leq \frac{1}{8} \end{aligned}$$

よって $h \leq \frac{1}{2}$ である。また、等号の成立条件は、

$$\begin{cases} \sin \gamma = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{2} & \cdots \textcircled{2} \\ \cos^2(\alpha - \beta) = 1 & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

が共に成立することであり、③より、

$$\cos(\alpha - \beta) = \pm 1$$

今、 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ だから $-\frac{\pi}{2} < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$ より $\cos(\alpha - \beta) > 0$

よって、

$$\cos(\alpha - \beta) = 1$$

$$\alpha - \beta = 0$$

$$\alpha = \beta$$

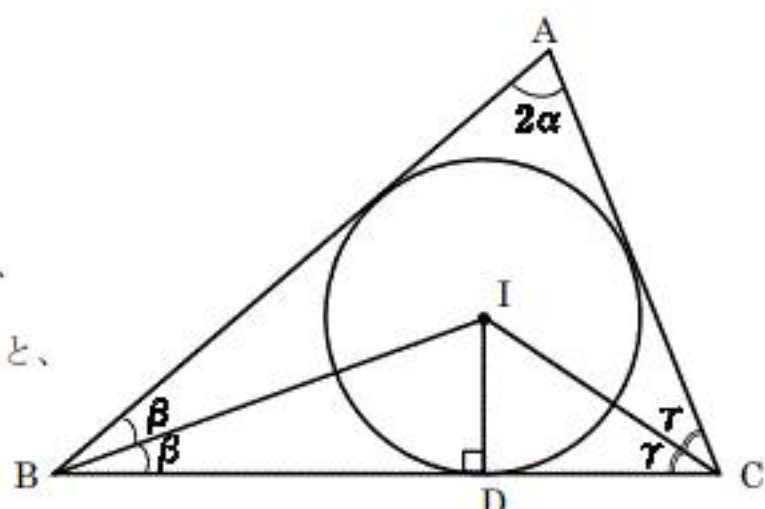
また②より、

$$\sin \gamma = \frac{1}{2}$$

$0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ なので、 $\gamma = \frac{\pi}{6}$ である。 $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ より $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$ なので、

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{6}$$

であり、このとき三角形 ABC は正三角形である。 …答



⑤

$$z^2 - \alpha z + 2i = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

(1) z の方程式①が実数解をもつとき、それを $z = k$ (k は実数) とすると、

$$k^2 - \alpha k + 2i = 0$$

が成立する。 $k \neq 0$ であるから、

$$\alpha = k + \frac{2}{k}i$$

となる。よって、 k を $k \neq 0$ で変化させたときに、点 α が複素数平面上に描く図形は、

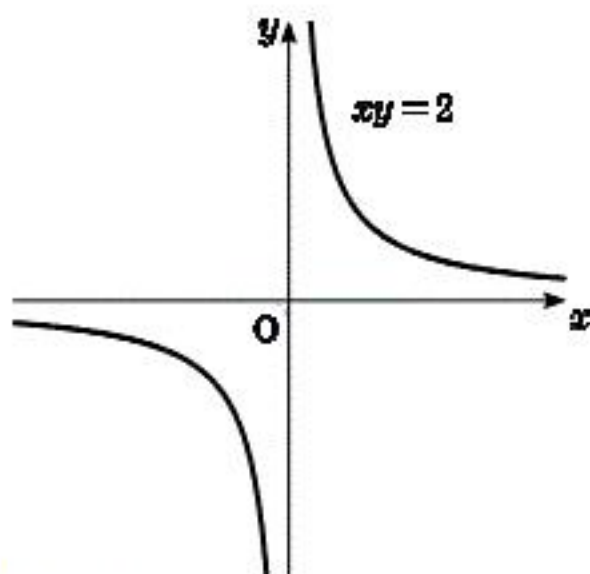
$$X = k, \quad Y = \frac{2}{k}$$

とおくことで k を消去して、

$$XY = 2$$

よって、点 (X, Y) は曲線 $xy = 2$ 上にあり、これが軌跡である。

直角双曲線であり、右図のようになる。 …答



(2) 条件より、 $z = \cos \theta + i \sin \theta$ とおける。また、 $\gamma = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$ とする。

このとき、①とで、

$$\begin{cases} \alpha = z + \frac{2i}{z} \\ \beta = \alpha \gamma \end{cases}$$

が成立する。 α を消去すると、

$$\beta = \left(z + \frac{2i}{z} \right) \gamma$$

$$= z\gamma + \frac{2i\gamma}{z}$$

$$= \cos \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) + 2 \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - \theta \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - \theta \right) \right\}$$

$$= \cos \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) + 2 \cos \left(\frac{3\pi}{4} - \theta \right) + i \left\{ \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) + 2 \sin \left(\frac{3\pi}{4} - \theta \right) \right\}$$

$$= \cos \theta \cos \frac{\pi}{4} - \sin \theta \sin \frac{\pi}{4} + 2 \left(\cos \frac{3\pi}{4} \cos \theta + \sin \frac{3\pi}{4} \sin \theta \right)$$

$$+ i \left(\sin \theta \cos \frac{\pi}{4} + \cos \theta \sin \frac{\pi}{4} + 2 \sin \frac{3\pi}{4} \cos \theta - 2 \cos \frac{3\pi}{4} \sin \theta \right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin \theta - \cos \theta) + i \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} (\sin \theta + \cos \theta)$$

ここで、

$$X = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin \theta - \cos \theta), \quad Y = \frac{3\sqrt{2}}{2} (\sin \theta + \cos \theta)$$

とおくと、

$$\sin \theta - \cos \theta = \sqrt{2} X, \quad \sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{3} Y$$

から、

$$\sqrt{2} \sin \theta = X + \frac{1}{3} Y, \quad \sqrt{2} \cos \theta = \frac{1}{3} Y - X$$

これらより θ を消去すると、

$$2 \sin^2 \theta + 2 \cos^2 \theta = \left(X + \frac{1}{3} Y \right)^2 + \left(\frac{1}{3} Y - X \right)^2$$

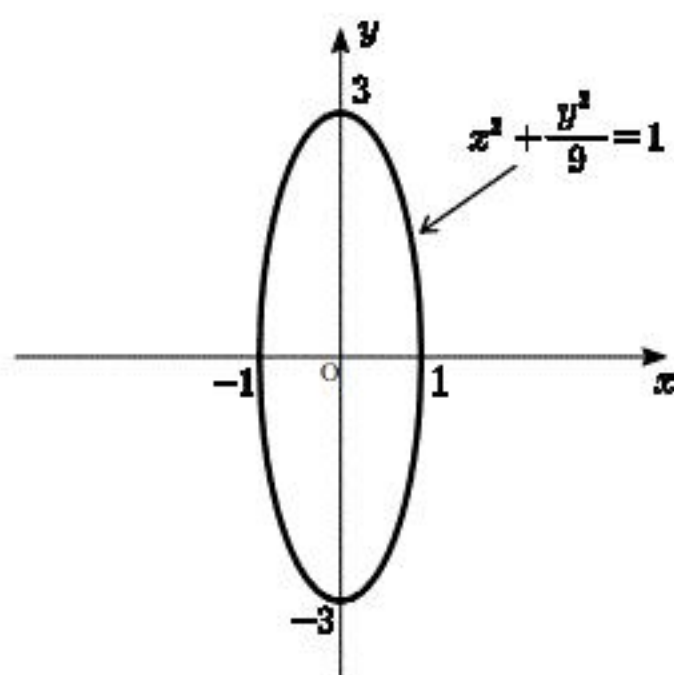
$$2 = 2X^2 + \frac{2}{9} Y^2$$

$$X^2 + \frac{Y^2}{9} = 1$$

よって、点 (X, Y) は楕円 $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$ 上にある。

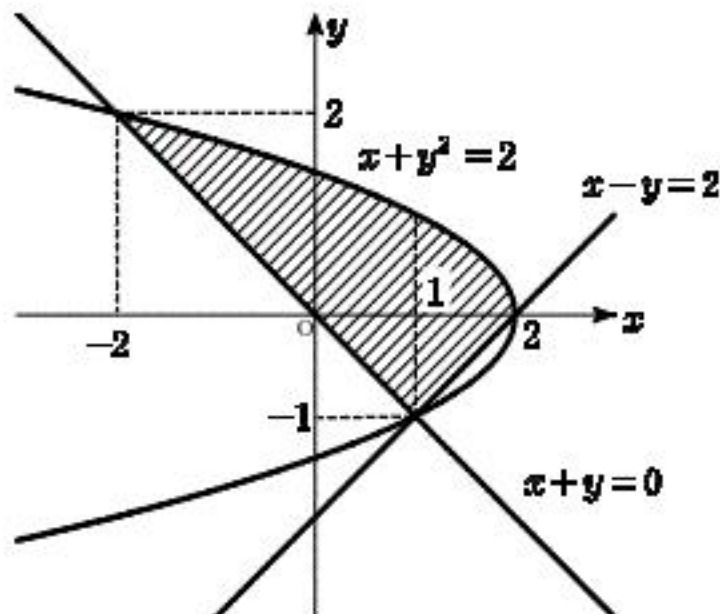
従って、点 β が複素数平面上に描く図形は

右図のようになる。 …答



[6]

(1) S は右図の斜線部分
(境界はすべて含む)



(2) $x + y^2 = 2 \quad \dots \textcircled{1}$

$x + y = 0 \quad \dots \textcircled{2}$

$x - y = 2 \quad \dots \textcircled{3}$

とする。①上の点 $P(2-t^2, t)$ ($0 \leq t \leq 2$) を考える。
点 P から②, ③へ、それぞれ垂線 PH , PR をおろす。
このとき、

$$PH = \frac{|2-t^2+t|}{\sqrt{2}}$$

$$PR = \frac{|2-t^2-t-2|}{\sqrt{2}} = \frac{t^2+t}{\sqrt{2}} \quad (0 \leq t \text{ より})$$

であり、 $Q(1, -1)$ としたとき、 QH の長さを h とすると、

$$h = PR = \frac{t^2+t}{\sqrt{2}}$$

となる。また、 $PH^2 = \frac{1}{2}(2-t^2+t)^2$ であり、

$$\frac{dh}{dt} = \frac{2t+1}{\sqrt{2}}, \quad h: 0 \rightarrow 3\sqrt{2} \text{ のとき } t: 0 \rightarrow 2$$

だから、

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{3\sqrt{2}} PH^2 dh \\ &= \pi \int_0^{3\sqrt{2}} \frac{1}{2} (2-t^2+t)^2 dh \\ &= \pi \int_0^2 \frac{1}{2} (2-t^2+t)^2 \frac{2t+1}{\sqrt{2}} dt \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \int_0^2 (2t^5 - 3t^4 - 8t^3 + 5t^2 + 12t + 4) dt \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left[\frac{1}{3}t^6 - \frac{3}{5}t^5 - 2t^4 + \frac{5}{3}t^3 + 6t^2 + 4t \right]_0^2 \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left(\frac{64}{3} - \frac{96}{5} - 32 + \frac{40}{3} + 24 + 8 \right) \\ &= \frac{58\sqrt{2}}{15} \pi \quad \dots \text{答} \end{aligned}$$

