

①

$$(1) \quad y = ax \quad \cdots \textcircled{1}, \quad y = x^2 + a \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$c = b^2 \quad \cdots \textcircled{3}, \quad b < 0 \quad \cdots \textcircled{4}$$

について、①、②より y を消去して、

$$ax = x^2 + a$$

$$x^2 - ax + a = 0 \quad \cdots \textcircled{5}$$

条件より⑤の2解が b, c であり、③と④より $b < 0 < c$ となり、異なる。

また、解と係数の関係より、

$$b + c = a \quad \cdots \textcircled{6}, \quad bc = a \quad \cdots \textcircled{7}$$

が成立する。

ここで、③を⑥、⑦へ代入して c を消去すると、

$$b + b^2 = a \quad \cdots \textcircled{8}, \quad b \cdot b^2 = a \quad \cdots \textcircled{9}$$

となり、⑧、⑨より a を消去すると、

$$b + b^2 = b^3$$

$$b(b^2 - b - 1) = 0$$

ここで④から $b \neq 0$ なので、

$$b^2 - b - 1 = 0$$

$$b = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

④より、

$$b = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

このとき⑧から、

$$a = b + b^2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 = 2 - \sqrt{5}$$

よって⑥から、

$$c = a - b = 2 - \sqrt{5} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

となる。以上から、

$$a = 2 - \sqrt{5}, \quad b = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad c = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad \cdots \text{答}$$

②

$$\log_a(x-n) > \frac{1}{2} \log_a(2n-x) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$0 < a < 1$ または $1 < a$, n は正の整数

について、真数の条件より、

$$x-n > 0 \text{ かつ } 2n-x > 0$$

から、

$$n < x < 2n \quad \cdots \textcircled{2}$$

で考える。

(1) $n=6$ のとき、②より、

$$6 < x < 12 \quad \cdots \textcircled{3}$$

この範囲で①は、

$$\log_a(x-6) > \frac{1}{2} \log_a(12-x) \Leftrightarrow \log_a(x-6)^2 > \log_a(12-x)$$

(i) $0 < a < 1$ のとき、

$$(x-6)^2 < 12-x$$

$$(x-3)(x-8) < 0$$

これを解いて、 $3 < x < 8$

③とで、 $6 < x < 8$

(ii) $1 < a$ のとき、

$$(x-6)^2 > 12-x$$

$$(x-3)(x-8) > 0$$

これを解いて、 $x < 3$ または $8 < x$

③とで、 $8 < x < 12$

以上より求める整数は、

$0 < a < 1$ のとき、 $x=7$ …答

$1 < a$ のとき、 $x=9, 10, 11$ …答

(2) (i) $0 < a < 1$ のとき、②の範囲で①は、

$$2\log_a(x-n) > \log_a(2n-x)$$

$$\log_a(x-n)^2 > \log_a(2n-x)$$

$$(x-n)^2 < 2n-x$$

$$x^2 - (2n-1)x + n(n-2) < 0$$

ここで、

$$f(x) = x^2 - (2n-1)x + n(n-2)$$

を考える。このとき、

$$f(n) = -n < 0 \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$f(2n) = n^2 > 0 \quad \cdots \textcircled{5}$$

なので、 $f(x) < 0$ を満たす整数 x が存在するための必要十分条件は、

$$f(n+1) < 0$$

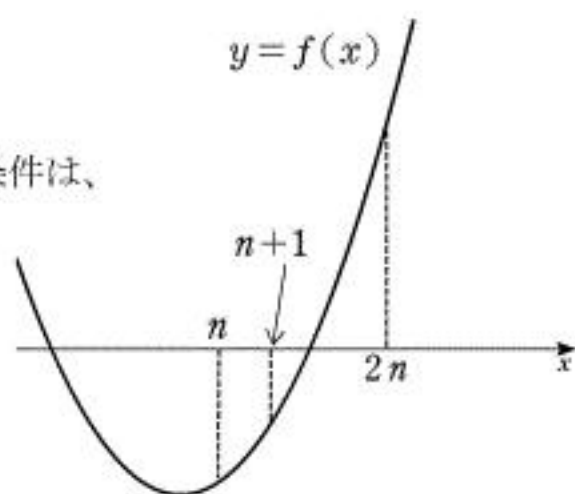
が成立することであり、(このとき $x=n+1$ が存在する)

$$(n+1)^2 - (2n-1)(n+1) + n(n-2) < 0$$

$$-n+2 < 0$$

$$2 < n$$

よって $n \geq 3$ である。



(ii) $1 < a$ のとき、②の範囲で①は、(i)と同様にして、

$$(x-n)^2 > 2n-x$$

$$x^2 - (2n-1)x + n(n-2) > 0$$

から、④、⑤より、 $f(x) > 0$ を満たす整数 x が存在する

ための必要十分条件は、

$$f(2n-1) > 0$$

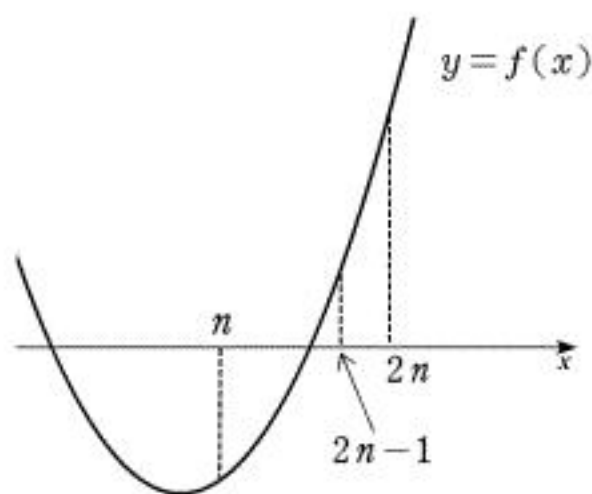
が成立することであり、(このとき $x=2n-1$ が存在する)

$$(2n-1)^2 - (2n-1)(2n-1) + n(n-2) > 0$$

$$n(n-2) > 0$$

$$n < 0 \text{ または } 2 < n$$

n は正の整数だから、 $n \geq 3$ である。



以上(i), (ii)よりいずれの場合も $n \geq 3$ となり、これが求める条件である。 …答

[3]

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$a_{n+2} a_n = 2 a_{n+1}^2 \quad (n=1, 2, 3, \cdots) \quad \cdots \textcircled{2}$$

について、

$$(1) \quad a_n > 0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

③が $n \geq 1$ で成立することを数学的帰納法にて示す。

(i) ①より③は $n=1, 2$ のとき成立する。

(ii) k が 1 以上の整数のとき、③は $n=k, k+1$ で成立、つまり、

$$a_k > 0, \quad a_{k+1} > 0$$

と仮定する。このとき②で $n=k$ とすると、

$$a_{k+2} a_k = 2 a_{k+1}^2$$

$$a_{k+2} = \frac{2 a_{k+1}^2}{a_k} > 0$$

よって③は $n=k+2$ でも成立する。

以上から、すべての正の整数 n について、 a_n は正である。 $\cdots$ 証明終わり

$$(2) \quad \textcircled{2} \Leftrightarrow \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = 2 \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

について、 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = b_n$ とすると、

$$b_{n+1} = 2 b_n$$

よって数列 $\{b_n\}$ は公比 2 の等比数列なので、

$$b_n = b_1 \cdot 2^{n-1}$$

$$= \frac{a_2}{a_1} \cdot 2^{n-1}$$

$$= 3 \cdot 2^{n-1}$$

したがって、

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 3 \cdot 2^{n-1}$$

$$a_{n+1} = b_n \cdot a_n \quad (b_n = 3 \cdot 2^{n-1} > 0 \text{ とおいた})$$

ここで両辺の対数(底が 2)を取ることで、

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 b_n + \log_2 a_n$$

より、 $n \geq 2$ のとき、

$$\sum_{k=1}^{n-1} (\log_2 a_{k+1} - \log_2 a_k) = \sum_{k=1}^{n-1} \log_2 b_k$$

$$\log_2 a_n - \log_2 a_1 = \log_2 (b_1 \cdot b_2 \cdots b_{n-1})$$

$$\log_2 a_n = \log_2 (b_1 \cdot b_2 \cdots b_{n-1})$$

よって、

$$\begin{aligned} a_n &= b_1 \cdot b_2 \cdots b_{n-1} \\ &= (3 \cdot 2^0) (3 \cdot 2^1) \cdots (3 \cdot 2^{n-2}) \\ &= 3^{n-1} \cdot 2^{0+1+\cdots+(n-2)} \\ &= 3^{n-1} \cdot 2^{\frac{1}{2}(n-2)(n-1)} \end{aligned}$$

これは $n=1$ でも成立する。以上より、

$$a_n = 3^{n-1} \cdot 2^{\frac{1}{2}(n-2)(n-1)} \quad (n \geq 1) \quad \cdots \text{答}$$

※ 解答の b_n を求めたあと、

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1 \\ &= (3 \cdot 2^{n-2}) (3 \cdot 2^{n-3}) \cdots (3 \cdot 2^0) \cdot 1 \\ &= 3^{n-1} \cdot 2^{(n-2)+(n-3)+\cdots+1+0} \\ &= 3^{n-1} \cdot 2^{\frac{1}{2}(n-2)(n-1)} \end{aligned}$$

と計算することもできる。

[4]

(1) $R(j)$ は、1回目の試行の直後に、 n 枚の硬貨のなかに金貨が j 枚だけ残る確率である。
以下、1枚の硬貨を投げたとき表が出る確率、裏が出る確率は等しく $\frac{1}{2}$ であるとして考える。
 n 枚の硬貨から、表になる j 枚の硬貨を選ぶ。残り $n-j$ 枚は裏だから、求める確率は、

$$\begin{aligned} R(j) &= {}_n C_j \left(\frac{1}{2}\right)^j \left(\frac{1}{2}\right)^{n-j} \\ &= {}_n C_j \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$

(2) $P_k(j) (k \geq 2)$ は、 k 回目の試行の直後に、 n 枚の硬貨のなかに金貨が j 枚だけ残る確率であり、これは、

(i) 最後に残る j 枚の金貨は、 k 回の試行すべてで表が出ている

(ii) 他の $n-j$ 枚の硬貨はすべて、 k 回の試行の少なくとも1回で裏が出ている
としたとき、(i), (ii)が同時に起こる確率に等しい。

すると、最後に残る j 枚の金貨を選ぶ方法が、

${}_n C_j$ 通り

ある。この j 枚の金貨を投げたとき、全て表が出る確率が

$$\left(\frac{1}{2}\right)^j$$

なので、これが k 回連続して起こる確率が(i)の確率だから、

$$\left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^j \right\}^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{jk}$$

また、1枚の金貨を k 回連続して投げたとき、 k 回とも表が出る確率が

$$\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

なので、1枚の金貨を k 回連続して投げたとき、少なくとも1回は裏が出る確率は、

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

よって、(ii)の確率は、

$$\left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k \right\}^{n-j}$$

以上より、求める確率は、

$$P_k(j) = {}_n C_j \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{jk} \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k \right\}^{n-j} \quad \cdots \text{答}$$

(3) (2)の結果で $n=3$, $k=2$ としたものは、

$$\begin{aligned} P_2(j) &= {}_3 C_j \left(\frac{1}{2}\right)^{2j} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right\}^{3-j} \\ &= {}_3 C_j \left(\frac{1}{4}\right)^j \left(\frac{3}{4}\right)^{3-j} \end{aligned}$$

ここで、

3枚の金貨から始めて、

2回目の試行の直後では金貨が少なくとも1枚残るが、

3回目の試行の直後には3枚すべてが銀貨になるのは、

(ア) 2回目の試行の直後では金貨が1枚残り、

3回目の試行の直後には3枚すべてが銀貨になる

(イ) 2回目の試行の直後では金貨が2枚残り、

3回目の試行の直後には3枚すべてが銀貨になる

(ウ) 2回目の試行の直後では金貨が3枚残り、

3回目の試行の直後には3枚すべてが銀貨になる

のいずれかが起こる場合であり、これらは全て排反であるから、

求める確率は、

$$\begin{aligned} &P_2(1) \cdot \frac{1}{2} + P_2(2) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + P_2(3) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\ &= {}_3 C_1 \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + {}_3 C_2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + {}_3 C_3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\ &= \frac{27}{2^7} + \frac{9}{2^8} + \frac{1}{2^9} \\ &= \frac{127}{512} \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$