

①

(1) $f(x) = \sin x$ とおく。このとき、

$$f'(x) = \cos x$$

よって、 $y = f(x)$ 上の点 $(p, f(p))$ における接線の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= (\cos p)(x - p) + \sin p \\ &= (\cos p)x + \sin p - p \cos p \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

と表せる。同様に点 $(q, f(q))$ における接線の方程式は、

$$y = (\cos q)x + \sin q - q \cos q \quad \cdots \textcircled{2}$$

と表せる。次に①と②が直交する条件を考える。

$$(\cos p)(\cos q) = -1 \quad \cdots \textcircled{3}$$

を満たせばよく、

$$-1 \leq \cos p \leq 1, \quad -1 \leq \cos q \leq 1$$

であるから、

$$\textcircled{3} \Leftrightarrow (\cos p, \cos q) = (1, -1) \text{ または } (-1, 1)$$

となる。 p, q について対称なので、

$$\cos p = 1, \quad \cos q = -1$$

として考えても一般性を失わない。よって、

$$p = 2n\pi, \quad q = (2m-1)\pi \quad (m, n \text{ は整数})$$

と表せ、このとき、

$$\textcircled{1} \quad y = x - 2n\pi$$

$$\textcircled{2} \quad y = -x + (2m-1)\pi$$

となる。辺々和を取ると、

$$2y = \{2(m-n)-1\}\pi$$

から、求める交点の y 座標は、

$$y = \frac{2l-1}{2}\pi \quad (l \text{ は整数}) \quad \cdots \text{答}$$

②

$$\log_a(x-n) > \frac{1}{2} \log_a(2n-x) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$0 < a < 1$ または $1 < a$, n は正の整数
について、真数の条件より、

$$x-n > 0 \text{ かつ } 2n-x > 0$$

から、

$$n < x < 2n \quad \cdots \textcircled{2}$$

で考える。

(1) $n=6$ のとき、②より、

$$6 < x < 12 \quad \cdots \textcircled{3}$$

この範囲で①は、

$$\log_a(x-6) > \frac{1}{2} \log_a(12-x) \Leftrightarrow \log_a(x-6)^2 > \log_a(12-x)$$

(i) $0 < a < 1$ のとき、

$$(x-6)^2 < 12-x$$

$$(x-3)(x-8) < 0$$

これを解いて、 $3 < x < 8$

$$\textcircled{3} \text{ とで、 } 6 < x < 8$$

(ii) $1 < a$ のとき、

$$(x-6)^2 > 12-x$$

$$(x-3)(x-8) > 0$$

これを解いて、 $x < 3$ または $8 < x$

$$\textcircled{3} \text{ とで、 } 8 < x < 12$$

以上より求める整数は、

$$0 < a < 1 \text{ のとき、 } x=7 \quad \cdots \text{答}$$

$$1 < a \text{ のとき、 } x=9, 10, 11 \quad \cdots \text{答}$$

(2) (i) $0 < a < 1$ のとき、②の範囲で①は、

$$2 \log_a(x-n) > \log_a(2n-x)$$

$$\log_a(x-n)^2 > \log_a(2n-x)$$

$$(x-n)^2 < 2n-x$$

$$x^2 - (2n-1)x + n(n-2) < 0$$

ここで、

$$f(x) = x^2 - (2n-1)x + n(n-2)$$

を考える。このとき、

$$f(n) = -n < 0 \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$f(2n) = n^2 > 0 \quad \cdots \textcircled{5}$$

なので、 $f(x) < 0$ を満たす整数 x が存在するための必要十分条件は、

$$f(n+1) < 0$$

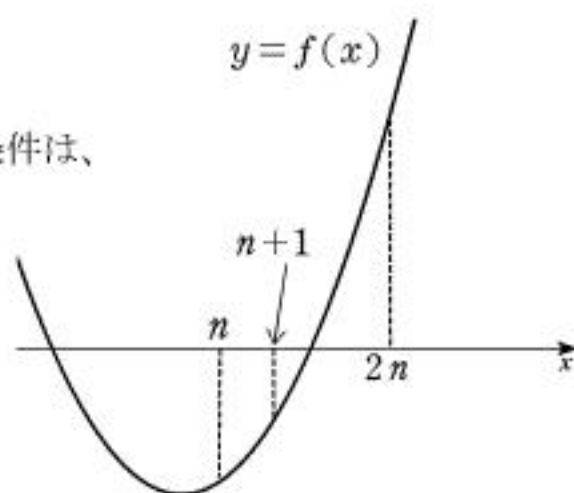
が成立することであり、(このとき $x=n+1$ が存在する)

$$(n+1)^2 - (2n-1)(n+1) + n(n-2) < 0$$

$$-n+2 < 0$$

$$2 < n$$

よって $n \geq 3$ である。



(ii) $1 < a$ のとき、②の範囲で①は、(i)と同様にして、

$$(x-n)^2 > 2n-x$$

$$x^2 - (2n-1)x + n(n-2) > 0$$

から、④、⑤より、 $f(x) > 0$ を満たす整数 x が存在する

ための必要十分条件は、

$$f(2n-1) > 0$$

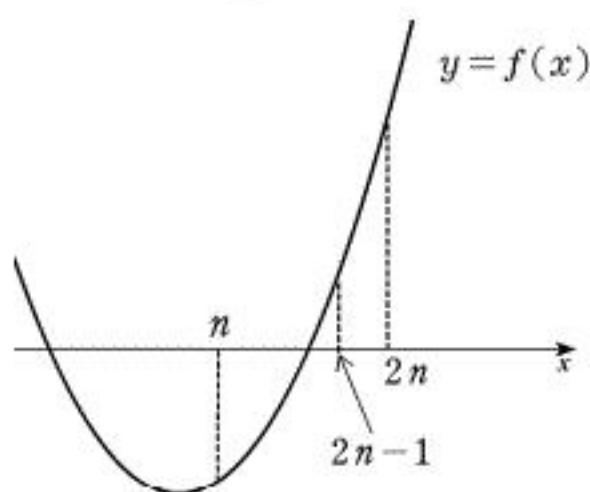
が成立することであり、(このとき $x=2n-1$ が存在する)

$$(2n-1)^2 - (2n-1)(2n-1) + n(n-2) > 0$$

$$n(n-2) > 0$$

$$n < 0 \text{ または } 2 < n$$

よって $n \geq 3$ である。



以上(i), (ii)よりいずれの場合も $n \geq 3$ となり、これが求める条件である。 $\cdots$ 答

[3]

$x_1 = a, \quad x_{n+1} = x_n + x_n^2 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$ について、

(1) $a > 0$ のとき、

$$x_1 = a > 0$$

であり、 $x_k > 0 \quad (k \geq 1)$ とすると $x_{k+1} = x_k + x_k^2 > 0$ だから、
数学的帰納法により

$$x_n > 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

である。また、

$$x_{n+1} - x_n = x_n^2 > 0$$

だから数列 $\{x_n\}$ は増加数列なので、 $k \geq 1$ のとき、

$$x_{k+1} - x_k > x_2 - x_1 = x_1 + x_1^2 - x_1 = x_1^2 = a^2$$

を満たす。よって、 $n \geq 2$ のとき、

$$\sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) > \sum_{k=1}^{n-1} a^2$$

$$x_n - x_1 > (n-1)a^2$$

$$x_n > a + (n-1)a^2$$

ここで

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{a + (n-1)a^2\} = \infty$$

だから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \quad \dots \text{証明終わり}$$

(2) $-1 < a < 0$ のとき、 $x_1 = a$ より $-1 < x_1 < 0$ を満たす。

また、 $-1 < x_k < 0 \quad (k \geq 1)$ とすると、 $f(x) = x + x^2$ において

$$x_{k+1} = f(x_k)$$

$$= \left(x_k + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

から、右のグラフより、

$$-\frac{1}{4} \leq x_{k+1} < 0 \quad \dots \text{①}$$

を満たす。よって、

$$-1 < x_{k+1} < 0$$

となり、数学的帰納法により、すべての正の整数 n に対して、

$$-1 < x_n < 0$$

が成り立つ。 $\dots$ 証明終わり

(3) $-1 < a < 0$ のとき、

$$-\frac{1}{n} < x_n < 0 \quad \dots \text{※}$$

が $n \geq 1$ で成立することを数学的帰納法により示す。(2)により、

$$-1 < x_n < 0 \quad (n \geq 1)$$

であり、※は $n=1$ で成立する。また、①で $k=1$ としたものから、

$$-\frac{1}{2} < -\frac{1}{4} \leq x_2 < 0$$

となり、※は $n=2$ でも成立する。

さて、 $x = k \quad (k \geq 2)$ のとき、

$$-\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{k} < -\frac{1}{k+1} < 0$$

であり、関数 $f(x)$ は $-\frac{1}{2} \leq x \leq 0$ で単調に増加するので、

$$-\frac{1}{k} < x_k < 0 \text{ が成立すると仮定すると、} f\left(-\frac{1}{k}\right) < f(x_k) = x_{k+1} < f(0) = 0 \text{ が成立し、}$$

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{k}\right) - \left(-\frac{1}{k+1}\right) &= \left(-\frac{1}{k}\right) + \left(-\frac{1}{k}\right)^2 + \frac{1}{k+1} \\ &= \frac{1-k}{k^2} + \frac{1}{k+1} \\ &= \frac{1}{k^2(k+1)} > 0 \end{aligned}$$

より、

$$-\frac{1}{k+1} < f\left(-\frac{1}{k}\right) < x_{k+1} < 0$$

が成立する。よって※は $n = k+1$ でも成立し、

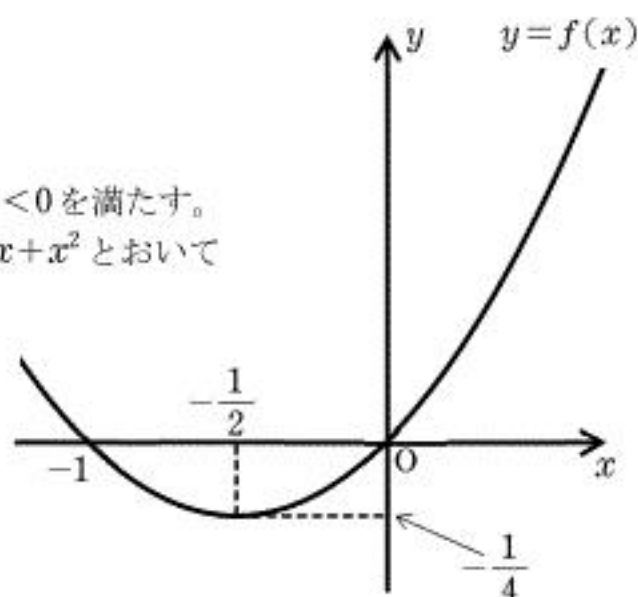
$$-\frac{1}{n} < x_n < 0 \quad \dots \text{※}$$

は $n \geq 1$ で成立することが示せた。よって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$$

とで、はさみうちの原理より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \quad \dots \text{答}$$



※ $|x_{n+1}| = |x_n| \cdot |1 + x_n| < |x_n| \cdot 1$ より数列 $\{|x_n|\}$ は単調に減少し、さらに $0 < |x_n| < 1$ なので
有界であるから収束する。 $x_n \rightarrow \alpha$ (α は定数で $-1 \leq \alpha \leq 0$) とすると $\alpha = \alpha + \alpha^2$ から $\alpha = 0$ とわかる。

[4]

$$\begin{aligned} (1) \quad & [2x^2 + x + 3] \\ &= [(x^2 + 1) \cdot 2 + x + 1] \\ &= x + 1 \quad \cdots \text{答} \\ & [x^5 - 1] \\ &= [(x^2 + 1)(x^3 - x) + x - 1] \\ &= x - 1 \quad \cdots \text{答} \\ & [[2x^2 + x + 3][x^5 - 1]] \\ &= [(x + 1)(x - 1)] \\ &= [x^2 - 1] \\ &= [(x^2 + 1) \cdot 1 - 2] \\ &= -2 \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$

(2) $A(x)$, $B(x)$ を $x^2 + 1$ で割ったときの商をそれぞれ $P(x)$, $Q(x)$ とすると、

$$\begin{aligned} A(x) &= (x^2 + 1)P(x) + [A(x)] \\ B(x) &= (x^2 + 1)Q(x) + [B(x)] \end{aligned}$$

と表せる。このとき、

$$\begin{aligned} A(x)B(x) &= \{(x^2 + 1)P(x) + [A(x)]\} \{(x^2 + 1)Q(x) + [B(x)]\} \\ &= (x^2 + 1)\{(x^2 + 1)P(x)Q(x) + P(x)[B(x)] + Q(x)[A(x)]\} + [A(x)][B(x)] \end{aligned}$$

だから、

$$\begin{aligned} & [A(x)B(x)] \\ &= [[A(x)][B(x)]] \end{aligned}$$

が成り立つ。 $\cdots$ 証明終わり

$$\begin{aligned} (3) \quad & (x \sin \theta + \cos \theta)^2 \\ &= x^2 \sin^2 \theta + 2x \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= (x^2 + 1) \sin^2 \theta + x \sin 2\theta + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ &= (x^2 + 1) \sin^2 \theta + x \sin 2\theta + \cos 2\theta \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} & [(x \sin \theta + \cos \theta)^2] \\ &= x \sin 2\theta + \cos 2\theta \quad \cdots \text{証明終わり} \end{aligned}$$

(4) $a = b = 0$ のとき、 $(ax + b)^4 = 0$ だから、

$$[(ax + b)^4] = 0$$

より不適。以下、 $a^2 + b^2 \neq 0$ とする。このとき、

$$ax + b = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

について $\sqrt{a^2 + b^2} = r$ とおくと、 $r > 0$ であり、

$$ax + b = r \left(\frac{a}{r} x + \frac{b}{r} \right)$$

ここで $\left(\frac{a}{r} \right)^2 + \left(\frac{b}{r} \right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{r^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1$ だから、

$$\frac{a}{r} = \sin \theta, \quad \frac{b}{r} = \cos \theta \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

とおける。よって、

$$ax + b = r(x \sin \theta + \cos \theta)$$

と表せる。このとき、(2), (3) で示した等式により、

$$\begin{aligned} [(ax + b)^4] &= [\{r(x \sin \theta + \cos \theta)\}^4] \\ &= [r^4 (x \sin \theta + \cos \theta)^4] \\ &= [[r^4][(x \sin \theta + \cos \theta)^4]] \quad ((2) \text{より}) \\ &= [r^4 (x \sin 2\theta + \cos 2\theta)^2] \quad ((3) \text{より}) \\ &= [[r^4][(x \sin 2\theta + \cos 2\theta)^2]] \quad ((2) \text{より}) \\ &= [r^4 (x \sin 4\theta + \cos 4\theta)] \quad ((3) \text{より}) \\ &= r^4 (x \sin 4\theta + \cos 4\theta) \\ &= (r^4 \sin 4\theta)x + r^4 \cos 4\theta \end{aligned}$$

が成立する。よって、

$$(r^4 \sin 4\theta)x + r^4 \cos 4\theta = -1$$

について係数比較により、

$$r^4 \sin 4\theta = 0 \quad \cdots \text{①}, \quad r^4 \cos 4\theta = -1 \quad \cdots \text{②}$$

を満たすものを考えればよい。

①, ②の2乗和の計算より、

$$\begin{aligned} r^8 \sin^2 4\theta + r^8 \cos^2 4\theta &= 0^2 + (-1)^2 \\ r^8 &= 1 \\ r &= 1 \quad (r > 0 \text{より}) \end{aligned}$$

このとき①, ②は、

$$\sin 4\theta = 0, \quad \cos 4\theta = -1$$

となり、

$$4\theta = (2n - 1)\pi \quad (n \text{ は整数})$$

である。以上より、

$$r = 1, \quad \theta = \frac{2n - 1}{4}\pi$$

よって、

$$\begin{aligned} a &= r \sin \theta = \sin \frac{2n - 1}{4}\pi \\ b &= r \cos \theta = \cos \frac{2n - 1}{4}\pi \end{aligned}$$

となり、 $n = 1, 2, 3, 4$ として、

$$(a, b) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad \cdots \text{答}$$

※(4)は誘導を無視して計算することもできる。

$$\begin{aligned} (ax + b)^4 &= (ax)^4 + {}_4C_1 (ax)^3 b^1 + {}_4C_2 (ax)^2 b^2 + {}_4C_3 (ax)^1 b^3 + b^4 \\ &= a^4 x^4 + 4a^3 b x^3 + 6a^2 b^2 x^2 + 4ab^3 x + b^4 \\ &= (x^2 + 1)(a^4 x^2 + 4a^3 b x + 6a^2 b^2 - a^4) + 4ab(b^2 - a^2)x + a^4 + b^4 - 6a^2 b^2 \end{aligned}$$

より、

$$[(ax + b)^4] = 4ab(b^2 - a^2)x + a^4 + b^4 - 6a^2 b^2$$

なので、

$$4ab(b^2 - a^2) = 0 \quad \text{かつ} \quad a^4 + b^4 - 6a^2 b^2 = -1$$

を解けばよく。前者から $ab = 0$ または $b = \pm a$ となり、

$ab = 0$ のときは後者に矛盾。

$$b = \pm a \text{ のとき、いずれにせよ } 4a^4 = 1 \text{ から } a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ となる。}$$

以上より同じ結果に至る。

[5]

$$\begin{aligned} (1) \quad & \int_{-1}^1 \frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x} dx \\ &= \int_{-1}^0 \frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x} dx + \int_0^1 \frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x} dx \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

について、第1項で

$$t = -x$$

と置換すると $\frac{dt}{dx} = -1$, $x: -1 \rightarrow 0$ のとき、 $t: 1 \rightarrow 0$ であり、

$$\begin{aligned} (\text{第1項}) &= \int_1^0 \frac{\sin^2(-\pi t)}{1+e^{-t}} (-dt) \\ &= \int_0^1 \frac{e^t \sin^2(\pi t)}{1+e^t} dt \\ &= \int_0^1 \frac{e^x \sin^2(\pi x)}{1+e^x} dx \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &= \int_0^1 \frac{e^x \sin^2(\pi x)}{1+e^x} dx + \int_0^1 \frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1+e^x}{1+e^x} \sin^2(\pi x) dx \\ &= \int_0^1 \sin^2(\pi x) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1-\cos(2\pi x)}{2} dx \\ &= \left[\frac{1}{2} \left\{ x - \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi x) \right\} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi \right) - \frac{1}{2} \left(0 - \frac{1}{2\pi} \sin 0 \right) \\ &= \frac{1}{2} \quad \cdots \text{証明終わり} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad (1+e^x)f(x) &= \sin^2(\pi x) + \int_{-1}^1 (e^x - e^t + 1)f(t) dt \\ &= \sin^2(\pi x) + (e^x + 1) \int_{-1}^1 f(t) dt - \int_{-1}^1 e^t f(t) dt \end{aligned}$$

について、

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = a, \quad \int_{-1}^1 e^t f(t) dt = b$$

とおく。このとき、

$$(1+e^x)f(x) = \sin^2(\pi x) + a(e^x + 1) - b$$

$$f(x) = \frac{\sin^2(\pi x) - b}{1+e^x} + a$$

と表せる。すると、

$$\begin{aligned} a &= \int_{-1}^1 \left(\frac{\sin^2(\pi t) - b}{1+e^t} + a \right) dt \\ &= \int_{-1}^1 \frac{\sin^2(\pi t)}{1+e^t} dt - b \int_{-1}^1 \left(1 - \frac{e^t}{1+e^t} \right) dt + 2a \\ &= \frac{1}{2} - b \left[t - \log(1+e^t) \right]_{-1}^1 + 2a \quad ((1)より) \\ &= \frac{1}{2} - b \left\{ 1 - \log(1+e) - (-1) + \log \left(1 + \frac{1}{e} \right) \right\} + 2a \\ &= \frac{1}{2} - b \{ 2 - \log(1+e) + \log(1+e) - \log e \} + 2a \\ &= \frac{1}{2} - b + 2a \end{aligned}$$

から、

$$b = a + \frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{2}$$

また、

$$\begin{aligned} b &= \int_{-1}^1 e^t \left(\frac{\sin^2(\pi t) - b}{1+e^t} + a \right) dt \\ &= \int_{-1}^1 \left(1 - \frac{1}{1+e^t} \right) \sin^2(\pi t) dt - b \left[\log(1+e^t) \right]_{-1}^1 + a \left[e^t \right]_{-1}^1 \\ &= \int_{-1}^1 \sin^2(\pi t) dt - \int_{-1}^1 \frac{\sin^2(\pi t)}{1+e^t} dt - b \left\{ \log(1+e) - \log \left(1 + \frac{1}{e} \right) \right\} + a \left(e - \frac{1}{e} \right) \quad \cdots * \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1-\cos(2\pi t)}{2} dt - \frac{1}{2} - b \{ \log(1+e) - \log(1+e) + \log e \} + a \left(e - \frac{1}{e} \right) \quad ((1)より) \\ &= \left[\frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi t) \right) \right]_{-1}^1 - \frac{1}{2} - b + a \left(e - \frac{1}{e} \right) \\ &= \frac{1}{2} \{ (1-0) - (-1-0) \} - \frac{1}{2} - b + a \left(e - \frac{1}{e} \right) \\ &= \frac{1}{2} - b + a \left(e - \frac{1}{e} \right) \end{aligned}$$

よって、

$$2b = \frac{1}{2} + a \left(e - \frac{1}{e} \right) \quad \cdots \textcircled{3}$$

以上②, ③を解いて、

$$a = \frac{e}{2(e^2 - 2e - 1)}, \quad b = \frac{e^2 - e - 1}{2(e^2 - 2e - 1)}$$

従って、

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin^2(\pi x) - \frac{e^2 - e - 1}{2(e^2 - 2e - 1)}}{1+e^x} + \frac{e}{2(e^2 - 2e - 1)} \\ &= \frac{\sin^2(\pi x)}{1+e^x} - \frac{e^2 - e - 1}{2(1+e^x)(e^2 - 2e - 1)} + \frac{e}{2(e^2 - 2e - 1)} \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$

* $\int_{-1}^1 \sin^2(\pi x) dx$ の計算は、 $\sin^2(\pi x)$ が x の偶関数であるから、

$2 \int_0^1 \sin^2(\pi x) dx$ で計算することもできる。

⑥

(1) $p(n+1,2)$ は、

この試行を $n+1$ 回繰り返したとき、
取り出した赤玉が全部で2個である確率
であり、これは、

(i) この試行を n 回繰り返したとき、

取り出した赤玉が全部で2個であり、(確率 $p(n,2)$)
かつ $n+1$ 回目に白玉を取り出す確率

(ii) この試行を n 回繰り返したとき、

取り出した赤玉が全部で1個であり、(確率 $p(n,1)$)
かつ $n+1$ 回目に赤玉を取り出す確率

の和に等しい。

また、この試行では、

赤玉を k 回($0 \leq k \leq 5$)取り出したあとの袋に入っている玉は、
赤玉が $5-k$ 個、白玉が $5+k$ 個

となっていることから、

$$\begin{aligned} p(n+1,2) &= p(n,2) \cdot \frac{7}{10} + p(n,1) \cdot \frac{4}{10} \\ &= \frac{7}{10} p(n,2) + \frac{2}{5} p(n,1) \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$

(2) $p(n,1)$ について、

これはこの試行を n 回繰り返したとき、取り出した赤玉が全部で1個である確率である。

そこで、 n 回のうち、 k 回目にだけ赤玉を取り出す確率を p_k ($1 \leq k \leq n, n \geq 2$)とすると、

$$\begin{aligned} p_k &= \left(\frac{5}{10} \right)^{k-1} \cdot \left(\frac{5}{10} \right)^1 \cdot \left(\frac{6}{10} \right)^{n-k} \\ &= \left(\frac{3}{5} \right)^n \left(\frac{5}{6} \right)^k \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned} p(n,1) &= \sum_{k=1}^n p_k \\ &= \left(\frac{3}{5} \right)^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{5}{6} \right)^k \\ &= \left(\frac{3}{5} \right)^n \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1 - \left(\frac{5}{6} \right)^n}{1 - \frac{5}{6}} \\ &= 5 \left\{ \left(\frac{3}{5} \right)^n - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right\} \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$

(3) (1), (2)の結果より、 $p(n,2)=a_n$ とおくと、

$$\begin{aligned} a_2 &= p(2,2) = \text{『2回の試行で、ともに赤玉を取り出す確率』} \\ &= \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{10} \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{7}{10} a_n + 2 \left\{ \left(\frac{3}{5} \right)^n - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right\} \\ \Leftrightarrow a_{n+1} + 20 \left(\frac{3}{5} \right)^{n+1} - 10 \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} &= \frac{7}{10} \left\{ a_n + 20 \left(\frac{3}{5} \right)^n - 10 \left(\frac{1}{2} \right)^n \right\} \quad \cdots ※ \end{aligned}$$

よって、数列 $\left\{ a_n + 20 \left(\frac{3}{5} \right)^n - 10 \left(\frac{1}{2} \right)^n \right\}$ は公比 $\frac{7}{10}$ の等比数列なので、 $n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} a_n + 20 \left(\frac{3}{5} \right)^n - 10 \left(\frac{1}{2} \right)^n &= \left\{ a_2 + 20 \left(\frac{3}{5} \right)^2 - 10 \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right\} \left(\frac{7}{10} \right)^{n-2} \\ a_n &= 10 \left(\frac{7}{10} \right)^n - 20 \left(\frac{3}{5} \right)^n + 10 \left(\frac{1}{2} \right)^n \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$

※これは、

$$a_{n+1} + p \left(\frac{3}{5} \right)^{n+1} + q \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} = \frac{7}{10} \left\{ a_n + p \left(\frac{3}{5} \right)^n + q \left(\frac{1}{2} \right)^n \right\}$$

とおいて展開したものと、元の漸化式を比較して作ったものである。 $p=20, q=-10$ となる。
また、(3)の結果は $n=1$ でも成立しているものである。(設定上は不要である)