

〔解答〕

$$(1) \quad \boxed{\text{ア}} \quad x^2 - 2x \cos \theta + \cos^2 \theta + \sin \theta \quad \boxed{\text{イ}} \quad -x^2 - 2x \cos \theta - \cos^2 \theta - \sin \theta$$

$$(2) \quad \boxed{\text{ウ}} \quad -1 \quad \boxed{\text{エ}} \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \boxed{\text{オ}} \quad \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\boxed{\text{カ}} \quad \sqrt{\sin^2 \theta - \sin \theta - 1} \quad \boxed{\text{キ}} \quad -\sqrt{\sin^2 \theta - \sin \theta - 1}$$

$$(3) \quad \boxed{\text{ク}} \quad \frac{8}{3}(\sin^2 \theta - \sin \theta - 1)^{\frac{3}{2}} \quad \boxed{\text{ケ}} \quad \frac{3}{2}\pi \quad \boxed{\text{コ}} \quad \frac{8}{3}$$

〔解説〕

(1) $y = x^2$ を x の正方向に $\cos \theta$ 、 y の正方向に $\sin \theta$ だけ平行移動させるから、

$$y - \sin \theta = (x - \cos \theta)^2$$

$$\Leftrightarrow y = x^2 - 2x \cos \theta + \cos^2 \theta + \sin \theta \quad \dots$$

となる。点 Q の座標は $(-\cos \theta, -\sin \theta)$ である。 $y = -x^2$ を x の方向に $-\cos \theta$ 、 y の方向に $-\sin \theta$ だけ平行移動させるから、

$$y - (-\sin \theta) = -\{x - (-\cos \theta)\}^2$$

$$\Leftrightarrow y = -x^2 - 2x \cos \theta - \cos^2 \theta - \sin \theta \quad \dots$$

となる。

(2)

①と②の共有点の x 座標は

$$x^2 - 2x \cos \theta + \cos^2 \theta + \sin \theta = -x^2 - 2x \cos \theta - \cos^2 \theta - \sin \theta$$

の解である。整理して、

$$x^2 + \cos^2 \theta + \sin \theta = 0$$

$$x^2 - \sin^2 \theta + \sin \theta + 1 = 0$$

となる。この方程式の判別式を D とすると、共有点を 2 つもつとき、

$$D = -4(-\sin^2 \theta + \sin \theta + 1) > 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \theta - \sin \theta - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin \theta - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} > 0$$

$$\therefore \sin \theta < \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} < \sin \theta$$

となる。 $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ より、

$$-1 \leq \sin \theta < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \dots \textcircled{3}$$

が求める答となる。 $D=0$ 、すなわち $\sin^2 \theta - \sin \theta - 1 = 0$ のとき、共有点は 1 つとなる。これを解くと、

$$\sin \theta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad (-1 \leq \sin \theta \leq 1)$$

となる。③のとき、共有点の x 座標は

$$x = \pm \sqrt{\sin^2 \theta - \sin \theta - 1}$$

となる。

(3)

$$\alpha = -\sqrt{\sin^2 \theta - \sin \theta - 1}, \beta = \sqrt{\sin^2 \theta - \sin \theta - 1}$$

とおく。すると、

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \{-x^2 - 2x \cos \theta - \cos^2 \theta - \sin \theta - (x^2 - 2x \cos \theta + \cos^2 \theta + \sin \theta)\} dx \\ &= -2 \int_{\alpha}^{\beta} (x^2 - \sin^2 \theta + \sin \theta + 1) dx \\ &= -2 \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= -2 \left(-\frac{1}{6}\right) (\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{8}{3} (\sin^2 \theta - \sin \theta - 1)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

を得る。③のとき、 $\sin^2 \theta - \sin \theta - 1 > 0$ より、 $\sin^2 \theta - \sin \theta - 1$ が最大の時、 S は最大値をとる。

$$f(\theta) = \sin^2 \theta - \sin \theta - 1, t = \sin \theta \quad (-1 \leq t < \frac{1-\sqrt{5}}{2})$$

とおくと、

$$\begin{aligned} f(\theta) &= g(t) \\ &= t^2 - t - 1 \\ &= \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \end{aligned}$$

となる。 $t = -1 \left(\theta = \frac{3}{2}\pi\right)$ のとき、 $f(\theta)$ は最大値 1 をとる。よって、 $\theta = \frac{3}{2}\pi$ で、 S は最大値 $\frac{8}{3}$ をとる。

【解答】

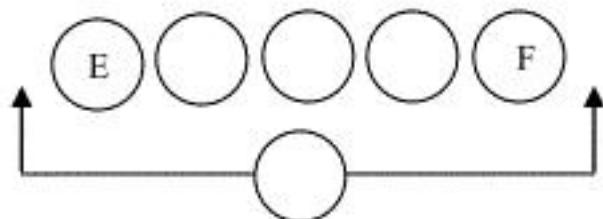
(1) ア 96 イ 144 ウ 192

(2) エ 480

(3) オ 240 カ 120 キ 240

【解説】

(1)



E と F の間の文字の並べ方は ${}_4P_3$ 通りであり、E と F の位置関係は 2 通りである。残りの 1 文字の入る場所は 2 通りだから、E と F の間に 3 文字が並ぶ並べ方は

$${}_4P_3 \times 2 \times 2 = 96 \text{ 通り}$$

である。E と F の間にちょうど 2 文字が並ぶ並び方は、E と F の位置関係は 2 通りであり、E と F の間の文字の並べ方は ${}_4P_2$ 通りである。E と F で挟まれた部分と残りの 2 文字の並べ方は $3!$ 通りだから、

$$2 \times {}_4P_2 \times 3! = 144 \text{ 通り}$$

である。E と F の間にちょうど 1 文字が並ぶ並び方は、2 文字のときと同様に考えて

$$2 \times {}_4P_1 \times 4! = 192 \text{ 通り}$$

である。

(2)

E と F の間に 4 文字が並ぶ並び方は、

$$2 \times 4! = 48 \text{ 通り}$$

となる。よって、E と F が隣り合わない並べ方は、

$$96 + 144 + 192 + 48 = 480 \text{ 通り}$$

である。

(3)

E と F の間に並ぶ文字の中に、A が入る並べ方は、B, C, D と X の 3 つを並べて、その後 3 つの X に左から、E, A, F もしくは F, A, E の順で文字を入れる並べ方と同じである。B, C, D と X の 3 つの並べ方は

$$\frac{6!}{3!} = 120 \text{ 通り}$$

となる。A, E, F の当てはめ方は、2 通りより、E と F の間に並ぶ文字の中に、A が入る並べ方は、

$$120 \times 2 = 240 \text{ 通り}$$

である。E と F の間に A と B が入る並べ方は、同様に考えて、C, D と X の 4 つの並び方は

$$\frac{6!}{4!} = 30 \text{ 通り}$$

である。A, B, E, F の当てはめ方は、

$$2 \times 2 = 4 \text{ 通り}$$

となるから、E と F の間に A と B が入る並べ方は、

$$30 \times 4 = 120 \text{ 通り}$$

である。E と F の間に C が入る並べ方は 240 通りである。(2)より、E と F の間に文字が存在する並べ方は 480 通りだから、E と F の間に並ぶ文字の中に C が入らない並び方は、

$$480 - 240 = 240 \text{ 通り}$$

である。

〔解答〕

- (1) ☐ア 120
 (2) ☐イ $15\sqrt{3}$
 (3) ☐ウ $\sqrt{3}$
 (4) ☐エ $\sqrt{22}$
 (5) ☐オ $6+\sqrt{22}$
 (6) ☐カ 2

〔解説〕

(1)

△ABCにおいて、余弦定理より

$$\begin{aligned}\cos \angle CAB &= \frac{6^2 + 10^2 - 14^2}{2 \cdot 6 \cdot 10} \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\therefore \angle CAB = 120^\circ$$

となる。

(2)

△ABCの面積は

$$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 \cdot \sin \angle CAB = 15\sqrt{3}$$

となる。

(3)

HPは△ABCの内接円の半径である。HP = r (cm)とおくと

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \times (6 + 10 + 14) \times r &= 15\sqrt{3} \\ \therefore r &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

となる。

(4)

△OHPにおいて、三平方の定理より、

$$\begin{aligned}\text{OH}^2 &= \text{OP}^2 - \text{HP}^2 \\ &= 25 - 3 \\ &= 22\end{aligned}$$

$$\therefore \text{OH} = \sqrt{22}$$

となる。

(5)

地面から点Hまでの高さは1(cm)である。HNの距離は、

$$\text{HO} + \text{ON} = 5 + \sqrt{22}$$

より、地面から点Nまでの高さは

$$1 + 5 + \sqrt{22} = 6 + \sqrt{22}$$

となる。

(6)

球の半径を a (cm) とすると、

$$\begin{aligned}\text{OH} &= \sqrt{a^2 - \text{HP}^2} \\ &= \sqrt{a^2 - 3}\end{aligned}$$

となる。球が地面にちょうど接するのは $a - \text{OH} = 1$ となるときだから、

$$a - \sqrt{a^2 - 3} = 1$$

が成り立つ。これを解くと、

$$a = 2$$

を得る。