

1

【解答】

$$\text{ア} \quad x+4 \quad \text{イ} \quad 2x-3 \quad \text{ウ} \quad 64 \quad \text{エ} \quad 2\sqrt{14} \quad \text{オ} \quad -\frac{2}{t^2}$$

$$\text{カ} \quad 4n^2-3n+1 \quad \text{キ} \quad \frac{4}{3}n^3+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$$

【解説】

(1)

$y=\frac{3x+4}{2x-1}$ とおき、これを変形すると

$$\begin{aligned} y &= \frac{3x+4}{2x-1} \Leftrightarrow (2x-1)y=3x+4 \quad \text{かつ} \quad x \neq \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow (2y-3)x=y+4 \quad \text{かつ} \quad x \neq \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow x=\frac{y+4}{2y-3} \left(\because y \neq \frac{3}{2} \right) \quad \text{かつ} \quad x \neq \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow x=\frac{y+4}{2y-3} \left(\because x=\frac{1}{2}+\frac{11}{2(2y-3)} \neq \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

となるから、 $f(x)=\frac{3x+4}{2x-1}$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ は

$$f^{-1}(x)=\frac{x+4}{2x-3}$$

であることがわかる。

(2)

$$\begin{aligned} \log_2 \sqrt[3]{x} &= \frac{1}{3} \log_2 x \\ \log_4 4x^3 &= 1+3\log_4 x \\ &= 1+3 \cdot \frac{\log_2 x}{\log_2 4} \\ &= 1+\frac{3}{2} \log_2 x \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \log_2 x - \left(1 + \frac{3}{2} \log_2 x \right) + 8 &= 0 \\ 7 - \frac{7}{6} \log_2 x &= 0 \\ \log_2 x &= 6 \\ x &= 64 \end{aligned}$$

である。

(3)

$$\begin{aligned} \left| \overline{a} - 2\overline{b} \right|^2 &= \left| \overline{a} \right|^2 - 4\overline{a} \cdot \overline{b} + 4\left| \overline{b} \right|^2 \\ &= 25 - 4\overline{a} \cdot \overline{b} \\ &= 9 \\ \therefore 4\overline{a} \cdot \overline{b} &= 16 \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \left| 2\overline{a} + \overline{b} \right| &= \sqrt{4\left| \overline{a} \right|^2 + 4\overline{a} \cdot \overline{b} + \left| \overline{b} \right|^2} \\ &= \sqrt{4 \times 9 + 16 + 4} \\ &= 2\sqrt{14} \end{aligned}$$

となる。

(4)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2\sin x \cos x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{2\cos x}{\sin x} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{2\cos x}{\sin x} \right)' \\ &= 2 \cdot \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} \\ &= -\frac{2}{\sin^2 x} \\ &= -\frac{2}{t^2} \end{aligned}$$

となる。

(5)(i)

$a_0=1, b_n=a_n-a_{n-1} (n \geq 1)$ とおくと

$$\begin{aligned} b_1 &= 2-1=1 \\ b_2 &= 11-2=9 \\ b_3 &= 28-11=17 \\ b_4 &= 53-28=25 \end{aligned}$$

となり、これは初項1、公差8の等差数列となるから

$$\begin{aligned} b_n &= 1+8(n-1) \\ &= 8n-7 \end{aligned}$$

である。したがって、 $n \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_0 + \sum_{k=1}^n b_k \\ &= 1+8\sum_{k=1}^n k-7n \\ &= 1+4n(n+1)-7n \\ &= 4n^2-3n+1 \end{aligned}$$

である。

(ii)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n (4k^2-3k+1) \\ &= \frac{4}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{3}{2}n(n+1) + n \\ &= \frac{4}{3}n^3 + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \end{aligned}$$

である。

2

【解答】

ア $p^{n+1}-1$ イ $S(a)S(b)$ ウ $2m$ エ 120 オ $(m-1)(n-1)$

カ $(m+1)(n+1)+2$ キ $\frac{L+M}{2}-1$

【解説】

(1)(i)

p^n の約数は
 $1, p, p^2, \dots, p^n$
であるから、
$$S(p^n) = \frac{p^{n+1}-1}{p-1}$$

となる。

(ii)

a, b は互いに素である。
$$S(a) = 1 + \dots + a$$
$$S(b) = 1 + \dots + b$$

であるから、
$$S(ab) = (1 + \dots + a)(1 + \dots + b)$$
$$= S(a)S(b)$$

となる。

(iii)

n が自然数であるとき 2^n は偶数であり $2^{n+1}-1$ は奇数であるから、 2^n と $2^{n+1}-1$ は互いに素である。また、問題文より $2^{n+1}-1$ が素数であることから $S(2^{n+1}-1) = 1 + (2^{n+1}-1)$ であるため、(ii)の結果と合わせて
$$S(m) = S(2^n)S(2^{n+1}-1)$$
$$= \frac{2^{n+1}-1}{2-1} \cdot \{1 + (2^{n+1}-1)\}$$
$$= 2^{n+1}(2^{n+1}-1)$$
$$= 2m$$

であることがわかる。

(iv)

$2^j, 3^j, 5$ は互いに素であるから、(ii)より
$$S(m) = S(2^j)S(3^j)S(5)$$
$$= \frac{2^{j+1}-1}{2-1} \cdot \frac{3^{j+1}-1}{3-1} \cdot (1+5)$$
$$= 3(2^{j+1}-1)(3^{j+1}-1)$$

である。また、
$$S(m) = 3m$$
$$= 2^j \cdot 3^{j+1} \cdot 5$$

であるから、
$$3(2^{j+1}-1)(3^{j+1}-1) = 2^j \cdot 3^{j+1} \cdot 5$$
$$2^j \cdot 3^j - 2^{j+1} - 3^{j+1} + 1 = 0$$
$$(2^j - 3)(3^j - 2) = 5$$

となる。

[1] $2^j - 3 = 1, 3^j - 2 = 5$ のとき
 $3^j = 7$
を満たす自然数 j は存在しないので、不適。

[2] $2^j - 3 = 5, 3^j - 2 = 1$ のとき
 $2^j = 8, 3^j = 3$
 $\therefore j = 3, j = 1$
となる。

したがって [1], [2] より、
 $m = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$
である。

(2)(i)

OA と OB を 2 辺とする長方形の内部にある格子点の数が $2L+N$ に相当するから、
$$2L+N = (m-1)(n-1)$$

である。

(ii)

OA と OB を 2 辺とする長方形の内部または周上にある格子点の数は
$$(m+1)(n+1)$$

であり、また、
$$2M - (N+2)$$

でもあるから、
$$2M - N = (m+1)(n+1) + 2$$

である。

(iii)

(i)(ii)より
$$2L+N+2M-N = (m-1)(n-1) + (m+1)(n+1) + 2$$
$$2(L+M) = 2mn + 4$$
$$mn = L+M-2$$

であるから、 $\triangle OAB$ の面積は
$$\frac{1}{2}mn = \frac{L+M}{2} - 1$$

である。

3

【解答】

ア $\frac{a^3}{12}(-a+2b)$ イ $\frac{1}{12}(a-b)^3(a+b)$ ウ -1 エ -1 オ 32

カ 3 キ $\frac{27}{4}$ ク $\frac{1}{4}$

【解説】

(1)(i)

$$\begin{aligned}\int_0^a x(x-a)(x-b)dx &= \int_0^a \{x^3 - (a+b)x^2 + abx\}dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}(a+b)x^3 + \frac{1}{2}abx^2 \right]_0^a \\ &= \frac{a^3}{12}(-a+2b)\end{aligned}$$

である。

(ii)

$$\begin{aligned}\int_a^b x(x-a)(x-b)dx &= \int_0^b x(x-a)(x-b)dx - \int_0^a x(x-a)(x-b)dx \\ &= \frac{b^3}{12}(-b+2a) - \frac{a^3}{12}(-a+2b) \\ &= \frac{1}{12}(-b^4+2ab^3+a^4-2a^3b) \\ &= \frac{1}{12}\{(a^2+b^2)(a^2-b^2)-2ab(a^2-b^2)\} \\ &= \frac{1}{12}(a-b)^3(a+b)\end{aligned}$$

である。

(2)

$(0, 0)$ と $(4, 4)$ を通る直線は

$$y=x$$

である。ここで、

$$\begin{aligned}x^3-3x^2-3x &= x \\ x(x-4)(x+1) &= 0 \\ \therefore x &= -1, 0, 4\end{aligned}$$

となるから、 G と $y=x$ は

$$(-1, -1)$$

でも交わる。求める図形の面積は

$$\begin{aligned}\int_0^4 \{x - (x^3-3x^2-3x)\}dx &= -\int_0^4 x(x-4)(x+1)dx \\ &= -\frac{4^3}{12}\{-4+2 \times (-1)\} \\ &= 32\end{aligned}$$

である。

(3)(i)

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 3$$

であるから、 $(0, 0)$ における G の接線は

$$\begin{aligned}y &= f'(0)x \\ &= -3x\end{aligned}$$

である。

$$\begin{aligned}x^3-3x^2-3x &= -3x \\ x^2(x-3) &= 0 \\ \therefore x &= 0, 3\end{aligned}$$

となるから、 G と L は $x=3$ でも交わり、

$$a=3$$

となる。

$$\begin{aligned}S(3) &= -\int_0^3 x^2(x-3)dx \\ &= -\frac{3^3}{12}(-3) \\ &= \frac{27}{4}\end{aligned}$$

である。

(ii)

$0 < a < \frac{3}{2}$ における $S(a)$ の最小値を求める。まず、 $S(a)$ を a の式で表すことを考える。直線 L

の式は

$$y = \frac{f(a)}{a}x = (a^2-3a-3)x \quad (\because a > 0)$$

であるから、これを与えられた関数 $y=f(x)$ と連立することで

$$\begin{aligned}x^3-3x^2-3x &= (a^2-3a-3)x \\ \Leftrightarrow x(x-a)\{x-(3-a)\} &= 0 \\ \therefore x &= 0, a, 3-a\end{aligned}$$

と、交点の x 座標が求まる。ここで $0 < a < \frac{3}{2}$ であるから、

$$0 < a < 3-a$$

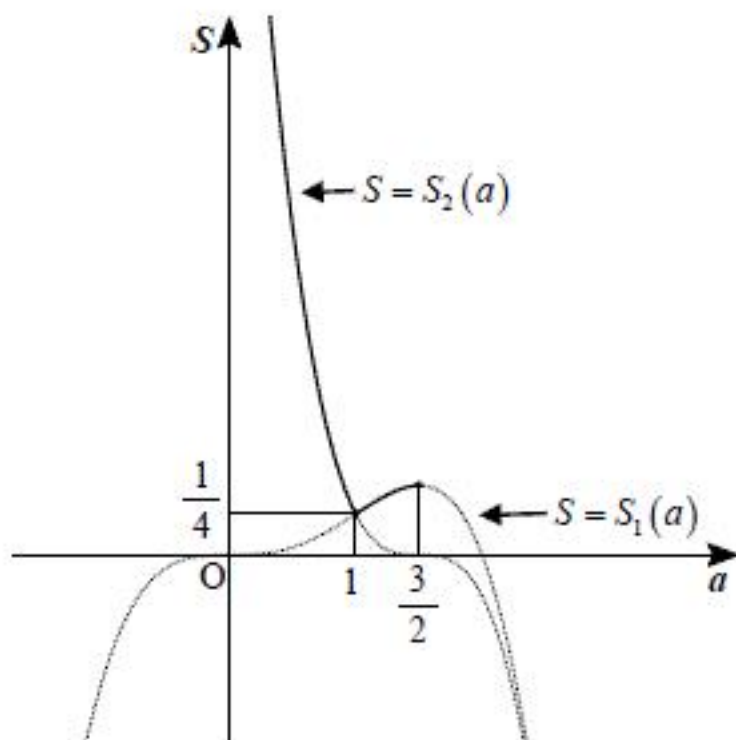
となるため、直線 L と G の囲まれる図形の面積を S_1, S_2 とおくと(1)の(i), (ii)より、

$$\begin{aligned}S_1 &= \int_0^a x(x-a)\{x-(3-a)\}dx = \frac{a^3}{12}\{-a+2(3-a)\} = \frac{a^3}{4}(2-a) \\ S_2 &= \int_a^{3-a} -x(x-a)\{x-(3-a)\}dx = -\frac{1}{12}\{a-(3-a)\}^3\{a+(3-a)\} = -\frac{1}{4}(2a-3)^3\end{aligned}$$

と求まる。これらを a の関数とみて微分すると、

$$\begin{aligned}S_1'(a) &= \frac{a^2}{2}(3-2a) \\ S_2'(a) &= -\frac{3}{2}(2a-3)^2\end{aligned}$$

となるから、これらを図示すると以下ようになる。



題意より、上図において太線部が $S=S(a)$ のグラフとなる。したがって、求める $S(a)$ の最小値は

$$S(1) = \frac{1}{4}$$

となる。