

数 学

(医 学 部)

— 2 月 6 日 —

次の空欄を埋めなさい。
 解答は、分数の場合には既約分数の形で書きなさい。

1

(1) $f(x)=\frac{3x+4}{2x-1}$ の逆関数は、 $f^{-1}(x)=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

(2) 方程式 $\log_2\sqrt[3]{x}-\log_44x^3+8=0$ の解は、 $x=\boxed{\text{ウ}}$ である。

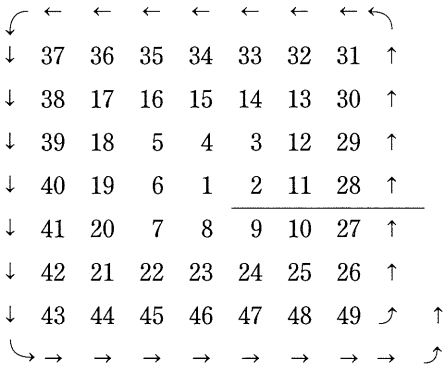
(3) $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{a}-2\vec{b}|=3$ のとき、 $|2\vec{a}+\vec{b}|=\boxed{\text{エ}}$ である。

(4) $f(x)=\frac{\sin 2x}{\sin^2 x}$ とする。 $t=\sin x$ とおくと、 $f'(x)$ は t の式として表され、 $\boxed{\text{オ}}$ となる。

(5) 右図のように自然数を配置したとき、1の右に並んでいる数の列を $\{a_n\}$ とする。たとえば、初めの3項は、 $a_1=2$, $a_2=11$, $a_3=28$ である。

(i) $a_n=\boxed{\text{カ}}$ である。

(ii) $\sum_{k=1}^n a_k=\boxed{\text{キ}}$ である。



2

(1) 自然数 m の正の約数の総和を $S(m)$ で表す。たとえば、 $S(10)=1+2+5+10=18$ である。

(i) p を素数、 n を自然数とすると、 $S(p^n)=\frac{\boxed{\text{ア}}}{p-1}$ となる。

(ii) 自然数 a , b の最大公約数が1のとき、 $S(ab)$ は $S(a)$ と $S(b)$ を用いて表され $S(ab)=\boxed{\text{イ}}$ となる。

(iii) n を自然数とし、 $2^{n+1}-1$ が素数のとき、 $m=2^n(2^{n+1}-1)$ とおく。 $S(m)$ を m を用いて表すと $S(m)=\boxed{\text{ウ}}$ である。

(iv) i , j を自然数とすると、 $m=2^i3^j5$ の形をしていて、 $S(m)=3m$ となる最小の m は $\boxed{\text{エ}}$ である。

(2) xy 平面上で x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点とよぶ。 m , n は自然数で、 $O(0, 0)$, $A(m, 0)$, $B(0, n)$ とする。 次のように L , M , N を定める。

- $L=\triangle OAB$ の内部にある格子点の個数
- $M=\triangle OAB$ の内部または周上にある格子点の個数
- N = 辺 AB 上にある格子点の個数、ただし点 A , B は除く

このとき、 m , n を用いて表すと

(i) $2L+N=\boxed{\text{オ}}$ である。

(ii) $2M-N=\boxed{\text{カ}}$ である。

(iii) ゆえに、 $\triangle OAB$ の面積は L , M を用いて $\boxed{\text{キ}}$ と表せる。

3

(1) 次の定積分を計算し、因数分解した形で表しなさい。ただし、 a, b は定数とする。

(i) $\int_0^a x(x-a)(x-b)dx = \boxed{\text{ア}}$

(ii) $\int_a^b x(x-a)(x-b)dx = \boxed{\text{イ}}$

(2) 関数 $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x$ のグラフを G とする。グラフ G 上の 2 点 $(0, 0)$ と $(4, 4)$ を通る直線は G ともう 1 つの点 $(\boxed{\text{ウ}}, \boxed{\text{エ}})$ で交わる。 G とこの直線で囲まれる図形は図 1 のように 2 つできる。これら 2 つの図形のうち面積が大きい方の図形の面積は $\boxed{\text{オ}}$ である。

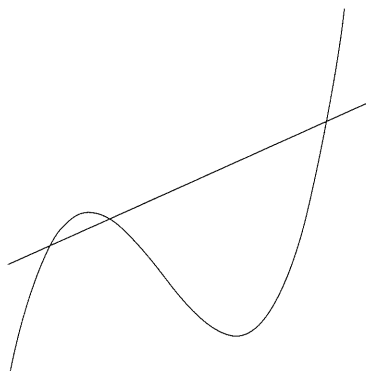


図 1

(3) 一般にグラフ G 上の点 $(0, 0)$ と点 $(a, f(a))$ ($a > 0$) を通る直線 L と G で囲まれる図形は 1 つまたは 2 つできる。そのうち面積が大きい方 (小さくない方) の面積を $S(a)$ と書く。ただし、 G と L で囲まれる図形が 1 つのときは、その図形の面積を $S(a)$ と書く。たとえば $S(4) = \boxed{\text{オ}}$ である。

(i) L が $(0, 0)$ における G の接線になっているとき、図 2 のように G と L で囲まれた図形は 1 つの図形からなる。このとき $a = \boxed{\text{カ}}$ かつ $S(\boxed{\text{カ}}) = \boxed{\text{キ}}$ である。

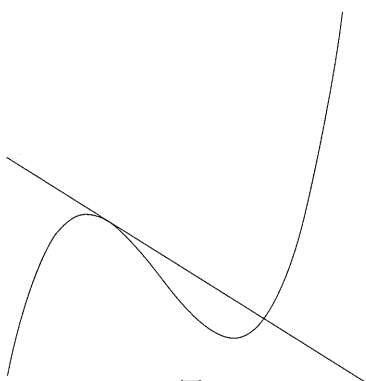


図 2

(ii) $0 < a < \frac{3}{2}$ における $S(a)$ の最小値は $\boxed{\text{ク}}$ である。