

$$(1) \quad \boxed{\text{ア}} \quad \sqrt{3}-1 \quad \boxed{\text{イ}} \quad \frac{8}{13}$$

$$(2) \quad \boxed{\text{ウ}} \quad \sqrt{2} \quad \boxed{\text{エ}} \quad 8$$

$$(3) \quad \boxed{\text{オ}} \quad 25 \quad \boxed{\text{カ}} \quad \frac{11}{8}$$

$$(4) \quad \boxed{\text{キ}} \quad 1-\left(\frac{5}{6}\right)^n \quad \boxed{\text{ク}} \quad 13$$

【解説】

(1)

$$\frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \sqrt{3}+1$$

であるから,

$$\begin{cases} \alpha=2 \\ \beta=\sqrt{3}+1-2=\sqrt{3}-1 \end{cases}$$

となり

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha+\beta+3} + \frac{1}{\alpha-\beta+1} &= \frac{1}{4+\sqrt{3}} + \frac{1}{4-\sqrt{3}} \\ &= \frac{4-\sqrt{3}+4+\sqrt{3}}{(4+\sqrt{3})(4-\sqrt{3})} \\ &= \frac{8}{13} \end{aligned}$$

(2)

公比を r , 項数を n とすると

$$\begin{cases} 3r^{n-1}=24\sqrt{2} & \cdots \text{①} \\ \frac{3(r^n-1)}{r-1}=45(\sqrt{2}+1) & \cdots \text{②} \end{cases}$$

が成り立つから, ①を②に代入して,

$$\frac{24\sqrt{2}r-3}{r-1}=45(\sqrt{2}+1)$$

より

$$r=\sqrt{2}$$

となり, これを①に代入すると,

$$3(\sqrt{2})^{n-1}=3 \cdot 8(\sqrt{2})$$

$$2^{\frac{1}{2}(n-1)}=2^{\frac{7}{2}}$$

より

$$n=8$$

(3)

$$f(f(x)) = \frac{2\left\{\frac{2(x-1)}{3}-1\right\}}{3} = \frac{4x-10}{9}$$

であるから

$$f(f(f(x))) = \frac{2\left\{\frac{4x-10}{9}-1\right\}}{3} = \frac{8x-38}{27}$$

となる。これが整数となるのは,

$$8x-38=27k \quad (k \text{ は整数})$$

という関係が成り立つときであり, こうなる最小の正の整数 x は k に順次, 正の整数を代入して

$$x=25 \quad (k=6)$$

を得る。また $f(f(f(x)))$ が整数となる実数 x のうち絶対値がもっとも小さくなる

のは, $f(f(f(x)))$ が x の単調増加関数であることを考えると,

$$8x-38=27k$$

が成立する, $x=0$ の付近で調べればよいことが分かる。よって

$$x=\frac{11}{8} \quad (k=-1)$$

(4)

一度も 6 の目が出ない確率は

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

であるから, 少なくとも 1 回 6 の目が出る確率は

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

となる。

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0.9$$

より

$$0.1 \geq \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

となる。ここで両辺の底 10 の対数をとると

$$-1 \geq n(\log_{10} 5 - \log_{10} 2 - \log_{10} 3)$$

$$\Leftrightarrow -1 \geq n(1 - 2\log_{10} 2 - \log_{10} 3)$$

$$\Leftrightarrow -1 \geq -0.0791n$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{1}{0.0791}$$

したがって

$$12 < \frac{1}{0.0791} < 13$$

より

$$n=13$$

$$(1) \quad \boxed{\text{ア}} \quad \frac{1}{2} \quad \boxed{\text{イ}} \quad \frac{5}{2}$$

$$(2) \quad \boxed{\text{ウ}} \quad -2 \quad \boxed{\text{エ}} \quad 5$$

$$(3) \quad \boxed{\text{オ}} \quad 2\sqrt{5} \quad \boxed{\text{カ}} \quad p+1 \quad \boxed{\text{キ}} \quad q-2 \quad \boxed{\text{ク}} \quad -2p+5 \quad \boxed{\text{ケ}} \quad 1+\sqrt{3}$$

$$\boxed{\text{コ}} \quad 3-2\sqrt{3}$$

〔解説〕

(1)

$$\begin{cases} 2 = -a + b \\ 4 = 3a + b \end{cases}$$

より

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{5}{2} \end{cases}$$

(2)

直線 l は直線 AB と直交するので

$$\frac{1}{2} \times c = -1$$

よって

$$c = -2$$

また、直線 l は辺 AB の中点 $(1, 3)$ を通るので

$$3 = c + d$$

よって

$$d = 5$$

(3)

正三角形の 1 辺の長さは、三平方の定理より

$$\sqrt{(3+1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

辺 CA の長さの 2 乗を考えて、

$$(p+1)^2 + (q-2)^2 = 20 \cdots \textcircled{1}$$

また、点 C は直線 l 上にあるので

$$q = -2p + 5 \cdots \textcircled{2}$$

よって上記 2 式より、②を①に代入して、

$$p^2 - 2p - 2 = 0$$

$p > 0$ のもとで解いて

$$p = 1 + \sqrt{3}$$

したがって

$$q = 3 - 2\sqrt{3}$$

$$(1) \quad \boxed{\text{ア}} \quad \frac{\cos \theta}{a} \quad \boxed{\text{イ}} \quad \frac{\sin \theta}{b}$$

$$(2) \quad \boxed{\text{ウ}} \quad \frac{ab}{\sin 2\theta} \quad \boxed{\text{エ}} \quad \frac{\pi}{4}$$

$$(3) \quad \boxed{\text{オ}} \quad \frac{b^2}{\sin^2 \theta} + \frac{a^2}{\cos^2 \theta} \quad \boxed{\text{カ}} \quad \frac{a}{a+b} \quad \boxed{\text{キ}} \quad a+b$$

〔解説〕

(1)

接線の公式を用いて

$$\frac{a \cos \theta}{a^2} x + \frac{b \sin \theta}{b^2} y = 1$$

よって

$$\frac{\cos \theta}{a} x + \frac{\sin \theta}{b} y = 1$$

(2)

点 A, 点 B の座標はそれぞれ $A\left(\frac{a}{\cos \theta}, 0\right), B\left(0, \frac{b}{\sin \theta}\right)$ であるから

$$S = \frac{1}{2} \times \frac{a}{\cos \theta} \times \frac{b}{\sin \theta} = \frac{ab}{\sin 2\theta}$$

となり, $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき $\sin 2\theta$ は 1 で最大となるので, S は最小となる。

(3)

線分 AB の長さは, 三平方の定理より

$$L^2 = \frac{b^2}{\sin^2 \theta} + \frac{a^2}{\cos^2 \theta}$$

$t = \cos^2 \theta$ とおくと

$$L^2 = \frac{b^2}{1 - \cos^2 \theta} + \frac{a^2}{\cos^2 \theta} = \frac{b^2}{1-t} + \frac{a^2}{t} = \frac{(b^2 - a^2)t + a^2}{t(1-t)}$$

となるので,

$$\begin{aligned} (L^2)' &= \left(\frac{b^2}{1-t}\right)' + \left(\frac{a^2}{t}\right)' = \frac{b^2}{(1-t)^2} - \frac{a^2}{t^2} \\ &= \frac{(b^2 - a^2)t^2 + 2a^2t - a^2}{t^2(1-t)^2} = \frac{\{(b+a)t - a\}\{(b-a)t + a\}}{t^2(1-t)^2} \end{aligned}$$

となる。 $a=b$ のとき

$$(b-a)t + a = a (>0)$$

であり, $a \neq b$ のとき

$$(b-a)t + a = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{a}{a-b}$$

は $0 < t < 1$ を満たさないことから次の増減表をえる。

t	0	...	$\frac{a}{a+b}$	...	1
$(L^2)'$		-	0	+	
L^2		$\searrow$	$(a+b)^2$	$\nearrow$	

よって L^2 は $t = \frac{a}{a+b}$ のときに最小値 $(a+b)^2$ をとり,

そのとき L も最小値 $a+b$ をとる。