

ア	イ	ウ	エ	オ
$2a$	$4a^2$	$-2a^3+8a^2$	$\frac{8}{3}$	$\frac{512}{27}$
カ	キ	ク	ケ	コ
$2n-3$	$-\frac{1}{2}$	$4+\sqrt{5}$	$2+\frac{2\sqrt{5}}{5}$	$\frac{\sqrt{5}}{5}$

【解説】

(1)
(i)

点Cの座標を (t,t^2) ($t>0$)とおくと、点Cにおける $y=x^2$ の接線の方程式は

$$\begin{aligned}y &= 2t(x-t)+t^2 \\ &= 2tx-t^2\end{aligned}$$

である。これが、 $A(a,0)$ を通るので

$$0=2ta-t^2 \Leftrightarrow 0=t(2a-t)$$

が成り立ち、 $t>0$ であることを考慮すると

$$t=2a$$

を得る。以上より、 $C(2a,4a^2)$ である。

(ii)
 AB を底辺と考えると

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}(4-a) \cdot 4a^2 \\ &= -2a^3+8a^2\end{aligned}$$

となる。

(iii)
 S を a で微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{dS}{da} &= -6a^2+16a \\ &= -6a\left(a-\frac{8}{3}\right)\end{aligned}$$

となるから、 S の増減表は次のようになる。

a	0	...	$\frac{8}{3}$	...	4
$\frac{dS}{da}$		+	0	-	
S			$\frac{512}{27}$		

増減表より、 S は $a=\frac{8}{3}$ のとき最大となり、最大値は $\frac{512}{27}$ であることが分かる。

(2)
等差数列 $\{a_n\}$ の公差を d とおくと、

$$\begin{aligned}a_3 &= a_1+2d=3 \\ a_7 &= a_1+6d=11\end{aligned}$$

が成り立つ。これを解くと、

$$a_1=-1, d=2$$

を得る。よって、一般項は

$$\begin{aligned}a_n &= -1+2(n-1) \\ &= 2n-3\end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^k \frac{1}{a_n a_{n+1}} &= \sum_{n=1}^k \left\{ \frac{1}{(2n-3)(2n-1)} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{-1} - \frac{1}{1} \right) + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2k-3} - \frac{1}{2k-1} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{-1} - \frac{1}{2k-1} \right)\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \frac{1}{a_n a_{n+1}} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{-1} - \frac{1}{2k-1} \right) \right\} \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

である。

(3)
点Pの座標は $(2+\cos\theta, \sin\theta)$ とおける。よって、

$$\begin{aligned}\overline{\text{OP}} \cdot \overline{\text{OQ}} &= (2+\cos\theta, \sin\theta) \cdot (2,1) \\ &= 4+2\cos\theta+\sin\theta \\ &= 4+\sqrt{5} \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{5}}\sin\theta \right) \\ &= 4+\sqrt{5} \cos(\theta+\alpha)\end{aligned}$$

となる。ここで、 α は $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 、 $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$ を満たす実数である。

よって、 $\overline{\text{OP}} \cdot \overline{\text{OQ}}$ は $\theta+\alpha=0$ のとき最大値 $4+\sqrt{5}$ をとり、このとき

$$\begin{aligned}\overline{\text{OP}} &= (2+\cos\theta, \sin\theta) \\ &= (2+\cos(-\alpha), \sin(-\alpha)) \\ &= (2+\cos\alpha, -\sin\alpha) \\ &= \left(2+\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5} \right)\end{aligned}$$

となるので、 $P\left(2+\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ である。

ア	イ	ウ
$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{(k-1)(k-2)}{240}$
エ	オ	カ
$\frac{(10-m)(9-m)}{240}$	$\frac{(10-n)(n-1)}{120}$	$\frac{33}{4}$

【解説】

(1)

$X=4$ となるのは、4 の番号のカードを取り出し、なおかつ 3 以下の番号のカードから 2 枚取り出す時である。よって、求める確率は

$$\frac{{}_3C_2}{{}_{10}C_3} = \frac{3}{120} = \frac{1}{40}$$

である。また、 $Z=2$ となるような取り出し方は、 $(1,2,3), (2,3,4), \dots, (8,9,10)$ のカードを取り出す 8 通りある。よって、求める確率は

$$\frac{8}{{}_{10}C_3} = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}$$

である。

(2)

$X=k$ となるのは、 k の番号のカードを取り出し、なおかつ $k-1$ 以下の番号のカードから 2 枚取り出す時である。よって、求める確率は

$$\frac{{}_{k-1}C_2}{{}_{10}C_3} = \frac{(k-1)(k-2)}{240}$$

である。

(3)

$Y=m$ となるのは、 m の番号のカードを取り出し、なおかつ $m+1$ 以上の番号のカードから 2 枚取り出す時である。よって、求める確率は

$$\frac{{}_{10-m}C_2}{{}_{10}C_3} = \frac{(10-m)(9-m)}{240}$$

である。

(4)

$Z=n$ となるのは、取り出したカードの最大の番号と最小の番号の差が n となる時である。最小の番号は、1 以上 $10-n$ 以下の $10-n$ 通りあり、これが決まれば最大の番号は一意に決まる。もう一枚のカードの番号は、最小の番号より大きく、最大の番号より小さいため、 $n-1$ 通りある。よって、求める確率は

$$\frac{(10-n)(n-1)}{{}_{10}C_3} = \frac{(10-n)(n-1)}{120}$$

である。

(5)

X の期待値は、(2)の答を用いて計算すると

$$\begin{aligned} & \sum_{k=3}^{10} \left\{ k \cdot \frac{(k-1)(k-2)}{240} \right\} \\ &= \frac{1}{960} \sum_{k=3}^{10} \{ (k+1)k(k-1)(k-2) - k(k-1)(k-2)(k-3) \} \\ &= \frac{1}{960} \{ (11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 - 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7) + (10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 - 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6) + \dots + (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0) \} \\ &= \frac{1}{960} (11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 - 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0) \\ &= \frac{33}{4} \end{aligned}$$

となる。

ア	イ	ウ
$-\frac{x \sin x + \cos x}{x^2}$	$y > 0$	x
エ	オ	カ
$\frac{\pi^2 \cos x}{8x} - 1$	$1 - \frac{\pi^2}{8x^2}$	$\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$

〔解説〕

(1)

$\frac{\cos x}{x}$ を微分すると、

$$\begin{aligned}\left(\frac{\cos x}{x}\right)' &= \frac{(\cos x)' \cdot x - \cos x \cdot (x)'}{x^2} \\ &= -\frac{x \sin x + \cos x}{x^2}\end{aligned}$$

となる。 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ において $\sin x > 0$, $\cos x > 0$ なので、 $\left(\frac{\cos x}{x}\right)' < 0$ である。

よって、 $y = \frac{\cos x}{x}$ は $0 < x < \frac{\pi}{2}$ において単調減少する。

$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\cos x}{x} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\cos x}{x} = 0$ であることに注意すると、求める値域は

$$y > 0$$

である。

(2)

(i)

$\cos t - \frac{\cos x}{x} t = 0$ を、 $t \neq 0$ であることに注意して変形すると、

$$\frac{\cos t}{t} = \frac{\cos x}{x}$$

となる。(1)より、 $\frac{\cos t}{t}$ は $0 < t < \frac{\pi}{2}$ において単調減少するので、

等式が成立するのは $t = x$ の時のみである。

(ii)

$\frac{\cos t}{t}$ は $0 < t < \frac{\pi}{2}$ において単調減少することと、(2)(i)の答を用いると、

$$0 < t \leq x \text{ のとき, } \frac{\cos t}{t} \geq \frac{\cos x}{x} \text{ すなわち } \cos t - \frac{\cos x}{x} t \geq 0$$

$$x < t < \frac{\pi}{2} \text{ のとき, } \frac{\cos t}{t} < \frac{\cos x}{x} \text{ すなわち } \cos t - \frac{\cos x}{x} t < 0$$

が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned}f(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \cos t - \frac{\cos x}{x} t \right| dt \\ &= \int_0^x \left(\cos t - \frac{\cos x}{x} t \right) dt - \int_x^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos t - \frac{\cos x}{x} t \right) dt \\ &= \left[\sin t - \frac{\cos x}{x} \cdot \frac{1}{2} t^2 \right]_0^x - \left[\sin t - \frac{\cos x}{x} \cdot \frac{1}{2} t^2 \right]_x^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2 \sin x - x \cos x + \frac{\pi^2 \cos x}{8x} - 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2 \cos x - \cos x + x \sin x - \frac{\pi^2}{8} \cdot \frac{x \sin x + \cos x}{x^2} \\ &= (\cos x + x \sin x) \left(1 - \frac{\pi^2}{8x^2} \right)\end{aligned}$$

となる。

(iii)

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ において $x \sin x + \cos x > 0$ なので、

$f'(x) = 0$ となるのは、 $1 - \frac{\pi^2}{8x^2} = 0$ すなわち $x = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}$ のときである。

したがって、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	...	$\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	$\times$	-	0	+	$\times$
$f(x)$	$\times$	$\searrow$		$\nearrow$	$\times$

増減表より、 $x = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}$ のとき $f(x)$ が最小値をとることが分かる。