

〔解答〕

ア	イ	ウ	
$1+x^2+x^4$	$1+x+x^2$	$(n-1)n$	
エ	オ	カ	
$2n^2-2n+1$	$4n^3$	2	

〔解説〕

(1)

$$f(x)=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5$$

について因数分解して

$$\begin{aligned} f(x) &= 1+x+x^2(1+x)+x^4(1+x) \\ &= (1+x)(1+x^2+x^4) \end{aligned}$$

または

$$\begin{aligned} f(x) &= 1+x^3+x(1+x^3)+x^2(1+x^3) \\ &= (1+x^3)(1+x+x^2) \end{aligned}$$

となる。

(2)

第 k 群には $2k$ 個の奇数が含まれるため、 $n \geq 2$ のとき第1群から第 $(n-1)$ 群までに含まれる奇数の個数は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} 2k &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (n-1)n \\ &= (n-1)n \end{aligned}$$

となる。これより、第 $(n-1)$ 群の最後の項は $(n-1)n$ 番目の奇数となるから、第 n 群の最初の項は $\{(n-1)n+1\}$ 番目の奇数である。よって、この項の数は

$$2\{(n-1)n+1\}-1=2n^2-2n+1$$

である。第 n 群の項は、初項 $2n^2-2n+1$ 、公差2、項数 $2n$ の等差数列をなすため、その総和は

$$\frac{1}{2} \cdot 2n \cdot \{2(2n^2-2n+1)+2(2n-1)\} = 4n^3$$

となる。

(3)

$$\log_2 x + \log_x 2 - 2 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

について、真数条件より $x > 0$ 、底の条件より $x > 0, x \neq 1$ である。つまり、 $x > 0, x \neq 1$ であるもとで、方程式①は

$$\begin{aligned} \log_2 x + \log_x 2 - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \log_2 x + \frac{\log_2 2}{\log_2 x} - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\log_2 x)^2 - 2\log_2 x + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\log_2 x - 1)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \log_2 x &= 1 \\ \Leftrightarrow x &= 2 \end{aligned}$$

と解ける。

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ
$(1-x)e^{-x}$	x	0	2	$1-5e^{-2}$
カ	キ		ク	
$2-5e^{-1}$	$6-16e^{-1}$		$\pi(11e^{-1}-4)$	

〔解説〕

(1)

$$f(x) = xe^{-x}$$

について

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + x \cdot (-e^{-x})$$

$$= (1-x)e^{-x} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。よって、曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(0, 0)$ におけるこのグラフの接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= f'(0)(x-0) + 0 \\ &= (1-0)e^0(x-0) + 0 \\ &= x \end{aligned}$$

である。次に、十分に大きい x に対して、 $(0 <) x < 2^x$ であることを用いると

$$0 < (f(x) =) \frac{x}{e^x} < \frac{2^x}{e^x}$$

$$\Leftrightarrow 0 < \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) < \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{e} \right)^x \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。 $2 < e$ であることより

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{e} \right)^x = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

となるから、②、③よりはさみうちの原理を用いて

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

となる。

(2)

曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = \frac{x}{e^2}$ の交点の x 座標は、方程式 $f(x) = \frac{x}{e^2}$ の解であり、これを解くと

$$f(x) = \frac{x}{e^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{e^x} = \frac{x}{e^2}$$

$$\Leftrightarrow xe^2 = xe^x$$

$$\Leftrightarrow x(e^x - e^2) = 0$$

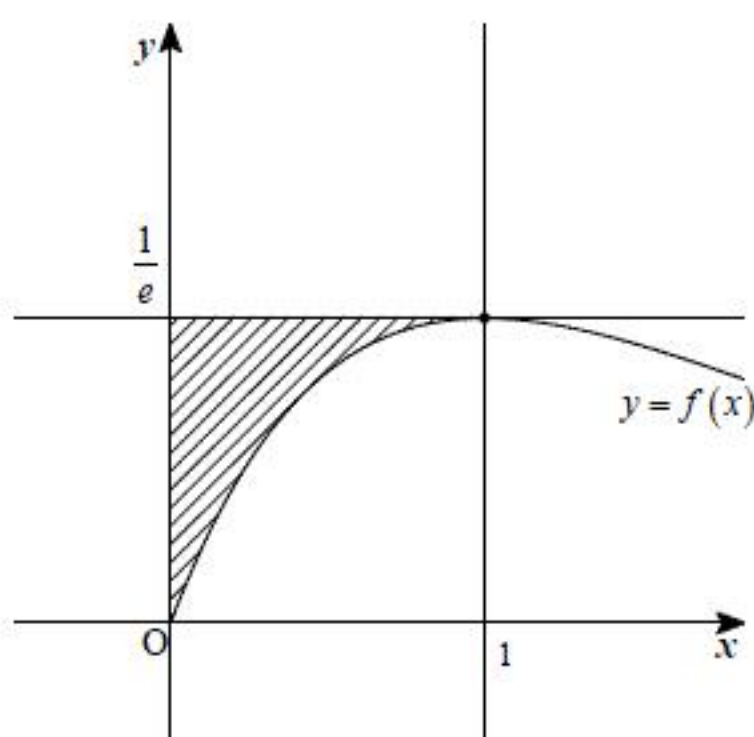
$$\Leftrightarrow x = 0, 2$$

となる。よって、曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = \frac{x}{e^2}$ の原点以外の交点の x 座標を p とすると、 $p = 2$ である。また、 $0 \leq x \leq p$ 、つまり、 $0 \leq x \leq 2$ の範囲において、 $\frac{x}{e^x} \geq \frac{x}{e^2}$ となることから曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = \frac{x}{e^2}$ で囲まれた部分の面積は

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left(\frac{x}{e^x} - \frac{x}{e^2} \right) dx &= \int_0^2 xe^{-x} dx - e^{-2} \int_0^2 x dx \\ &= [-xe^{-x}]_0^2 - \int_0^2 (-e^{-x}) dx - e^{-2} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^2 \\ &= -2e^{-2} - 2e^{-2} + [-e^{-x}]_0^2 \\ &= 1 - 5e^{-2} \end{aligned}$$

である。

(3)

体積 V は下図の斜線部を y 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積となる。

よって

$$V = \pi \int_0^{\frac{1}{e}} x^2 dy$$

となる。ここで、①より

$$dy = (1-x)e^{-x} dx$$

であり

y	0	$\rightarrow$	$\frac{1}{e}$
x	0	$\rightarrow$	1

であることから

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{1}{e}} x^2 dy \\ &= \pi \int_0^1 x^2 (1-x) e^{-x} dx \\ &= \pi \int_0^1 x^2 e^{-x} dx - \pi \int_0^1 x^3 e^{-x} dx \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 e^{-x} dx &= [-x^2 e^{-x}]_0^1 + 2 \int_0^1 x e^{-x} dx \\ &= -e^{-1} + 2 \left\{ [-x e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx \right\} \\ &= -e^{-1} + 2 \left\{ -e^{-1} + [-e^{-x}]_0^1 \right\} \\ &= -e^{-1} + 2(-e^{-1} - e^{-1} + 1) \\ &= 2 - 5e^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^3 e^{-x} dx &= [-x^3 e^{-x}]_0^1 + 3 \int_0^1 x^2 e^{-x} dx \\ &= -e^{-1} + 3(2 - 5e^{-1}) \\ &= 6 - 16e^{-1} \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} V &= \pi \left\{ (2 - 5e^{-1}) - (6 - 16e^{-1}) \right\} \\ &= \pi(11e^{-1} - 4) \end{aligned}$$

となる。

3

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ
$\sqrt{7}$	$\frac{15\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{7}}{14}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{6}$
カ	キ			
$\frac{2}{5}$	$\sqrt{3}$			

〔解説〕

(1)

余弦定理より

$$\begin{aligned} OB &= \sqrt{OA^2 + AB^2 - 2OA \cdot AB \cdot \cos \angle OAB} \\ &= \sqrt{5^2 + (3\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3\sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ} \\ &= \sqrt{7} \end{aligned}$$

となる。また△OABの面積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} OA \cdot AB \cdot \sin \angle OAB &= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3\sqrt{3} \cdot \sin 30^\circ \\ &= \frac{15\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

である。

(2)

余弦定理より

$$\begin{aligned} \cos \angle AOB &= \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2OA \cdot OB} \\ &= \frac{5^2 + (\sqrt{7})^2 - (3\sqrt{3})^2}{2 \cdot 5 \cdot \sqrt{7}} \\ &= \frac{\sqrt{7}}{14} \end{aligned}$$

となる。よって、ベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の内積の値は

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos \angle AOB \\ &= 5 \cdot \sqrt{7} \cdot \frac{\sqrt{7}}{14} \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

である。

(3)

△OAPについて

$$\begin{aligned} AP &= OA \cdot \cos \angle OAB \\ &= 5 \cos 30^\circ \\ &= \frac{5\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} OP &= OA \cdot \sin \angle OAB \\ &= 5 \sin 30^\circ \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

である。よってAPの長さは、ABの長さの $\frac{5}{6}$ 倍である。さらに、△BHPについて $\angle HBP = 60^\circ$

であり

$$\begin{aligned} BP &= AB - AP \\ &= 3\sqrt{3} - \frac{5\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

であることより

$$\begin{aligned} PH &= BP \cdot \tan 60^\circ \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} OH &= OP - PH \\ &= \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

となるから、OHの長さは、OPの長さの $\frac{2}{5}$ 倍である。また

$$\begin{aligned} BH &= \frac{BP}{\cos 60^\circ} \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

である。