

1

【解答】

(1)	ア	イ	ウ
	5	-12	13
(2)	エ	オ	
	$\frac{1}{8}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	
(3)	カ		
	$\frac{11}{14}$		
(4)	キ	ク	
	15	2	
(5)	ケ		
	26		

【解説】

(1)

与えられた式は

$$\begin{aligned}(x-5)^2-25+(y+12)^2-144&=0 \\ \Leftrightarrow (x-5)^2+(y+12)^2&=13^2\end{aligned}$$

と変形される。これは点 $(5, -12)$ を中心とする、半径13の円の方程式を表す。

(2)

倍角の公式および半角の公式から

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= 2\cos^2 \theta - 1 = 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1 = \frac{9}{8} - 1 = \frac{1}{8} \\ \sin^2 \frac{\theta}{2} &= \frac{1 - \cos \theta}{2} = \frac{1 - \frac{3}{4}}{2} = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

である。ここで $0 < \theta < \pi$ より $0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$ であるから、 $\sin \frac{\theta}{2} \geq 0$ より、

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

である。

(3)

与えられた2つのベクトルの大きさと内積を求めると、それぞれ

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= 1 \cdot 3 + (-2) \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = 11 \\ |\vec{a}| &= \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14} \\ |\vec{b}| &= \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{14}\end{aligned}$$

となる。ここで、内積の定義より $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ であるから、

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{11}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = \frac{11}{14}$$

である。

(4)

点Aを $(7, 14)$ とし、直線 $2x - 3y + 2 = 0$ に関して点Aと対称な点を点B、線分ABの中点をMとする。このとき、線分ABは直線 $2x - 3y + 2 = 0$ と直交し、かつ点Mは $2x - 3y + 2 = 0$ 上にある。直線 $2x - 3y + 2 = 0$ の法線ベクトルは $(2, -3)$ であるから、実数 t を用いて

$$\overrightarrow{AB} = t(2, -3)$$

と表せる。すると、 $\overrightarrow{AM} = \frac{t}{2}(2, -3)$ より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} \\ &= (7, 14) + \left(t, -\frac{3}{2}t\right) \\ &= \left(7+t, 14-\frac{3}{2}t\right)\end{aligned}$$

となる。点Mは $2x - 3y + 2 = 0$ 上の点であるから、

$$2(7+t) - 3\left(14 - \frac{3}{2}t\right) + 2 = 0$$

が成立する。これを解けば $t = 4$ が得られ、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} \\ &= (7, 14) + 4 \cdot (2, -3) \\ &= (15, 2)\end{aligned}$$

より、点Bの座標は $(15, 2)$ となる。

(5)

与えられた数の常用対数を取ると、 $\log_{10} 2 = 0.301$ より

$$\begin{aligned}\log_{10} 2^{85} &= 85 \log_{10} 2 \\ &= 85 \cdot 0.301 \\ &= 25.585\end{aligned}$$

が得られる。したがって $25 \leq \log_{10} 2^{85} < 26$ より、 2^{85} は26桁の整数である。

2

【解答】

	ア	イ		
(1)	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{36}$		
	ウ			
(2)	$\frac{1}{6^{N-2}}$			
	エ			
(3)	$\frac{79}{36}$			
	オ	カ	キ	ク
(4)	30	$\frac{1}{6}$	$\frac{11}{5} - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{6} \right)^{N-1}$	$\frac{11}{5}$

【解説】

(1)

1 回目に出た目を a とする ($a=1, 2, \dots, 6$)。 $N \geq 4$ より、さいころを 2 回投げてゲームが終了するのは、2 回目に a 以外の目が出る場合であるから、その確率は $\frac{5}{6}$ である。また、3 回投げてゲームが終了するのは、2 回目に a の目が出て、かつ 3 回目に a 以外の目が出る場合である。1 回さいころを投げたときに a の目が出る場合の確率は $\frac{1}{6}$ であるから、求める確率は

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$$

である。

(2)

得点が N 以上となるのは、1 回目から $N-1$ 回目まで全て同一の目が出た場合である。さいころを $N-1$ 回振ったときの目の出方は全部で 6^{N-1} 通り、さいころの目は 1 から 6 までの 6 通りあるので、求める確率は

$$\frac{6}{6^{N-1}} = \frac{1}{6^{N-2}}$$

である。

(3)

(1)と同様に、1 回目に出た目を a とする ($a=1, 2, \dots, 6$)。 $N=3$ のとき、得点が 2 となるのは 2 回目に a 以外の目が出る場合であり、得点が 3 となるのは、2 回目に a の目が出て、3 回目に a 以外の目が出る場合である。さらに、得点が 4 となるのは、2 回目、3 回目ともに a の目が出る場合である。したがって、得点と確率を示す表は以下のようになる。

得点	2	3	4
確率	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}$	$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$

上の表より、求める期待値は

$$2 \cdot \left(\frac{5}{6} \right) + 3 \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \right) + 4 \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \right) = \frac{60+15+4}{36} = \frac{79}{36}$$

となる。

(4)

1 回目に出た目を a とする ($a=1, 2, \dots, 6$)。 $2 \leq n \leq N$ のとき、得点が n となるのは、2 回目から $n-1$ 回目まで a の目が出て、 n 回目に a 以外の目が出る場合であり、その確率は

$$\left(\frac{1}{6} \right)^{n-2} \cdot \frac{5}{6} = 30 \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^n$$

である。また、得点が $N+1$ となるのは、2 回目から N 回目まで全て a が出る場合であるから、その確率は $\left(\frac{1}{6} \right)^{N-1}$ である。したがって、得点と確率を示す表は次のようになる。

得点	2	3	...	n	...	N	$N+1$
確率	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}$	...	$\frac{5}{6} \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^{n-2}$	...	$\frac{5}{6} \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^{N-2}$	$\left(\frac{1}{6} \right)^{N-1}$

上の表より、得点の期待値 a_N は

$$\begin{aligned} a_N &= \sum_{n=2}^N n \cdot \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^{n-2} + (N+1) \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^{N-1} \\ &= \frac{5}{6} \sum_{n=2}^N n \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^{n-2} + (N+1) \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^{N-1} \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

を計算すれば求まる。ここで、

$$S = \sum_{n=2}^N n \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^{n-2} = 2 \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^0 + 3 \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^1 + 4 \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^2 + \dots + N \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^{N-2} \quad \dots \textcircled{2}$$

とおくと、

$$\frac{1}{6} S = \sum_{n=2}^N n \left(\frac{1}{6} \right)^{n-1} = 2 \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^1 + 3 \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^3 + \dots + N \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^{N-1} \quad \dots \textcircled{3}$$

より、②から③を引くことで、

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{6} \right) S &= 2 \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^0 + (3-2) \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^1 + (4-3) \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^2 + \dots + (N-(N-1)) \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^{N-2} - N \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^{N-1} \\ &= 2 + \left\{ \left(\frac{1}{6} \right)^1 + \dots + \left(\frac{1}{6} \right)^{N-2} \right\} - N \left(\frac{1}{6} \right)^{N-1} \\ &= 2 + \frac{1}{6} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{6} \right)^{N-2}}{1 - \frac{1}{6}} - N \left(\frac{1}{6} \right)^{N-1} \\ &= \frac{11}{5} - \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^{N-2} - N \left(\frac{1}{6} \right)^{N-1} \\ \therefore S &= \frac{6}{5} \left\{ \frac{11}{5} - \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^{N-2} - N \left(\frac{1}{6} \right)^{N-1} \right\} \end{aligned}$$

となる。これを①へ代入すると、

$$\begin{aligned} a_N &= \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{5} \left\{ \frac{11}{5} - \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{6} \right)^{N-2} - N \left(\frac{1}{6} \right)^{N-1} \right\} + (N+1) \left(\frac{1}{6} \right)^{N-1} \\ &= \frac{11}{5} - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{6} \right)^{N-1} \end{aligned}$$

となり、 $0 < \frac{1}{6} < 1$ より

$$\lim_{N \rightarrow \infty} a_N = \frac{11}{5}$$

となる。

〔解答〕

	ア	イ	ウ	エ	オ
(1)	$\frac{13}{10}$	$\frac{15}{4}$	$3+\sqrt{13}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{7+\sqrt{17}}{8}$
	カ	キ			
(2)	$\frac{17}{50}$	$\frac{125}{6}\pi$			

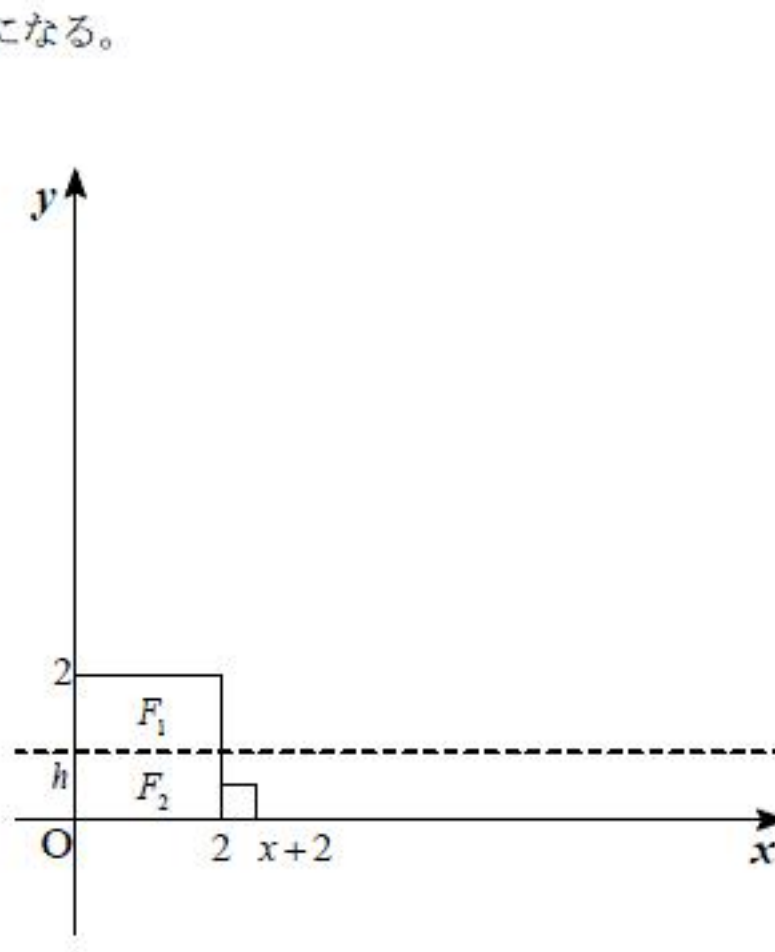
1)

形を E とする。いずれの場合も E の面積は $x^2 + 4$ であるから、 E の面積はともに $\frac{x^2 + 4}{2}$

$$A \subseteq \mathbb{R}^2$$

である。

直線 $y = h$ は F の面積

 $x \leq h < 2$ のとき

$$2h+x^2 = \frac{x^2+4}{2} \Leftrightarrow h = \frac{4-x^2}{4}$$

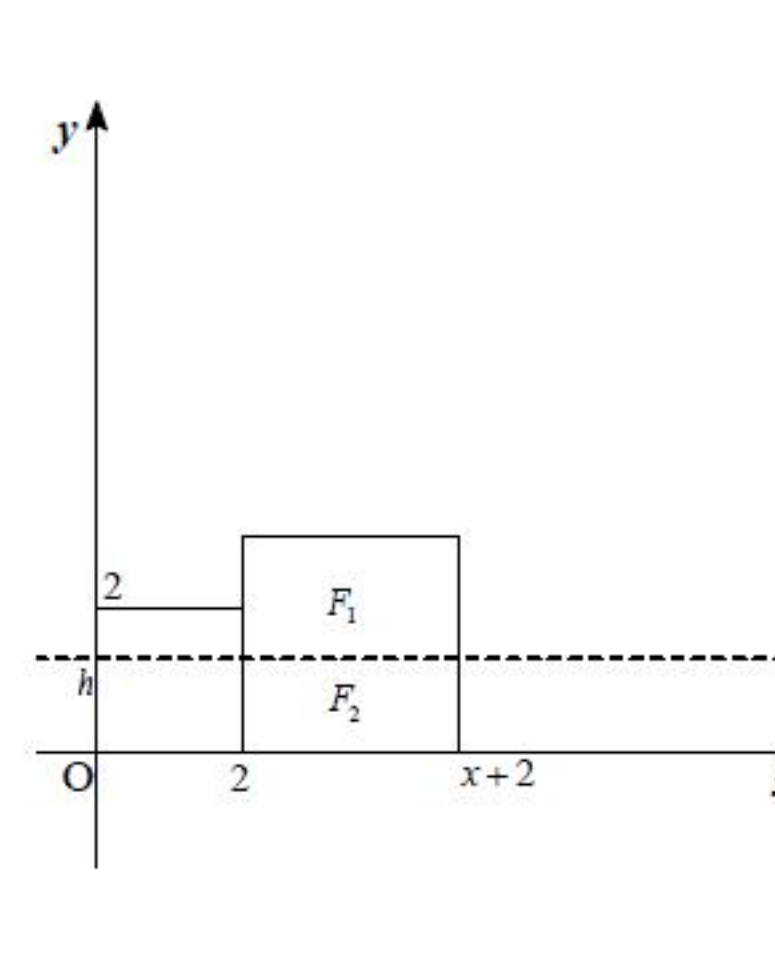
である。これが $x \leq h < 2$ を満たすのは、不等式 $x \leq \frac{4-x^2}{4} < 2$ を解いて、

$$0 < x \leq -2 + 2\sqrt{2}$$

となる場合である。

[2] $h < x$ かつ $h < 2$ のとき

図は以下のようになる。



上図より F_2 の面積は $h(x+2)$ であるから,

$$h(2+x) = \frac{x^2+4}{2} \Leftrightarrow h = \frac{x^2+4}{2(x+2)}$$

$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 4 > 0$$

$$\therefore x < -2 - 2\sqrt{2}, -$$

よび、

 x^2

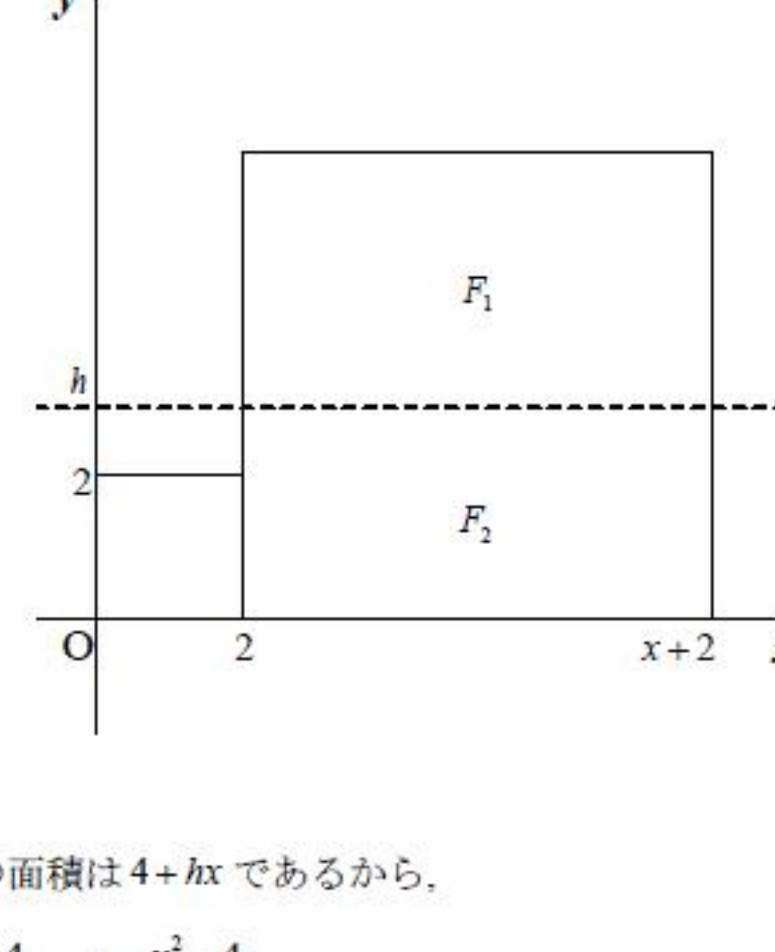
$$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 2 - 2\sqrt{2} < 0$$

$$0 \leq 2 + 2\sqrt{5} \leq n$$

$h < x$ のとき

図は以下のようになる

図は以下のよう


$$4 + hx = \frac{x^2 - 1}{2} \Leftrightarrow h = \frac{x^2 - 1}{2x}$$

ある。これが $2 \leq h < x$ を満