

1

【解答】

(1)	ア	
	3360	
(2)	イ	
	1	
(3)	ウ	エ
	$2 \leq x < \sqrt{5}$	$\frac{5}{4} < x \leq \frac{5}{3}, 3 \leq x < 4$
(4)	オ	
	3	
(5)	カ	
	$\frac{4}{3}$	

【解説】

(1)

求める選び方の総数は、
 ${}_8C_2 \cdot {}_{10}C_3 = 3360$ 通り
 である。

(2)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 2n} - n)(\sqrt{n^2 + 2n} + n)}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n - n^2}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

である。

(3)

(i)

条件より、
 $[x^2] = 4 \Leftrightarrow 4 \leq x^2 < 5$
 であり、 x は正の実数より、
 $2 \leq x < \sqrt{5}$
 である。

(ii)

条件より、 $[x], \left[\frac{5}{x}\right]$ はともに非負整数であるから、
 $[x] \times \left[\frac{5}{x}\right] = 3$
 $\Leftrightarrow [x] = 1$ かつ $\left[\frac{5}{x}\right] = 3$ 、または、 $[x] = 3$ かつ $\left[\frac{5}{x}\right] = 1$
 である。

[1] $[x] = 1$ かつ $\left[\frac{5}{x}\right] = 3$ のとき

$$\begin{aligned} [x] &= 1 \\ \Leftrightarrow 1 \leq x < 2 \\ \left[\frac{5}{x}\right] &= 3 \\ \Leftrightarrow 3 \leq \frac{5}{x} < 4 \\ \Leftrightarrow \frac{5}{4} < x \leq \frac{5}{3} \end{aligned}$$

であるから、これらの共通範囲は $\frac{5}{4} < x \leq \frac{5}{3}$ である。

[2] $[x] = 3$ かつ $\left[\frac{5}{x}\right] = 1$ のとき

$$\begin{aligned} [x] &= 3 \\ \Leftrightarrow 3 \leq x < 4 \\ \left[\frac{5}{x}\right] &= 1 \\ \Leftrightarrow 1 \leq \frac{5}{x} < 2 \\ \Leftrightarrow \frac{5}{2} < x \leq 5 \end{aligned}$$

であるから、これらの共通範囲は $3 \leq x < 4$ である。

以上[1],[2]より、求める x の範囲は $\frac{5}{4} < x \leq \frac{5}{3}, 3 \leq x < 4$ である。

(4)

真数条件から、
 $x-1 > 0$ かつ $x+3 > 0$
 $\therefore x > 1$

である。また、条件より、

$$\begin{aligned} \log_2(x-1) + \log_2(x+3) &= 2 + 2\log_4 3 \\ \Leftrightarrow \log_2(x-1) + \log_2(x+3) &= \log_2 4 + 2 \cdot \frac{\log_2 3}{\log_2 4} \\ \Leftrightarrow \log_2(x-1) + \log_2(x+3) &= \log_2 4 + \log_2 3 \\ \Leftrightarrow \log_2(x-1)(x+3) &= \log_2 12 \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} (x-1)(x+3) &= 12 \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x - 15 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+5)(x-3) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -5, 3 \end{aligned}$$

を得るが、 $x > 1$ より $x = 3$ である。

(5)

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin^3 x dx &= \int_0^\pi \sin^2 x \cdot \sin x dx \\ &= -\int_0^\pi (1 - \cos^2 x) \cdot (\cos x)' dx \\ &= \left[-\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x \right]_0^\pi \\ &= \left\{ -(-1) + \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 \right\} - \left\{ -1 + \frac{1}{3} \cdot 1^3 \right\} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

である。

〔解答〕

(1)	(i)	ア	イ			
		5	15			
	(ii)	ウ	エ	オ		
		4	2	2		
	(iii)	カ	キ	ク	ケ	
		6	2	$3 \cdot 2^n$	$3 \cdot 2^n - 2n - 3$	
(2)	コ					
	$3 \cdot 2^n - n^2 - 2n - 3$					

〔解説〕

(1)

(i)

条件より、 $a_1 = 1$ だから、漸化式に $n = 1, 2$ を代入し、

$$\begin{aligned} a_2 &= 2a_1 + 2 \cdot 1 + 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= 2a_2 + 2 \cdot 2 + 1 \\ &= 15 \end{aligned}$$

を得る。

(ii)

(i)の結果より、 $a_2 = 5$ だから、 $b_n = a_{n+1} - a_n$ とおくと、

$$\begin{aligned} b_1 &= a_2 - a_1 \\ &= 5 - 1 \\ &= 4 \end{aligned}$$

である。また、

$$a_{n+1} = 2a_n + 2n + 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

とすると、

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + 2(n+1) + 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。②－①より、

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n) + 2$$

であり、

$$b_{n+1} = 2b_n + 2$$

である。

(iii)

(ii)の結果より、

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 2b_n + 2 \\ \Leftrightarrow b_{n+1} + 2 &= 2(b_n + 2) \end{aligned}$$

であるから、 $c_n = b_n + 2$ とおくと、

$$c_{n+1} = 2c_n$$

である。また、(ii)の結果より $b_1 = 4$ であるから、 $c_1 = b_1 + 2 = 6$ である。よって、数列 $\{c_n\}$ は初項6、公比2の等比数列であるから、その一般項は、

$$\begin{aligned} c_n &= 6 \cdot 2^{n-1} \\ &= 3 \cdot 2^n \end{aligned}$$

である。ゆえに、

$$\begin{aligned} b_n &= c_n - 2 \\ &= 3 \cdot 2^n - 2 \end{aligned}$$

である。数列 $\{b_n\}$ は数列 $\{a_n\}$ の階差数列だから、 $n \geq 2$ のとき、数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (3 \cdot 2^k - 2) \\ &= 1 + \frac{6(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} - 2(n-1) \\ &= 3 \cdot 2^n - 2n - 3 \end{aligned}$$

であり、これは $n = 1$ の場合も成り立つ。

(2)

$$a_{n+1} = 2a_n + n^2 \quad \cdots \textcircled{3}$$

とすると、

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + (n+1)^2 \quad \cdots \textcircled{4}$$

である。④－③より、

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n) + 2n + 1$$

であり、

$$d_n = a_{n+1} - a_n$$

とおくと、数列 $\{d_n\}$ の漸化式は

$$d_{n+1} = 2d_n + 2n + 1$$

と書ける。また、

$$a_2 = 2a_1 + 1^2 = 1$$

より、

$$d_1 = a_2 - a_1 = 1$$

である。したがって、数列 $\{d_n\}$ は(1)の数列 $\{a_n\}$ と同一であるから、数列 $\{d_n\}$ の一般項は、

$$d_n = 3 \cdot 2^n - 2n - 3$$

となる。数列 $\{d_n\}$ は数列 $\{a_n\}$ の階差数列だから、 $n \geq 2$ のとき、数列 $\{a_n\}$ の一般項は、

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} d_k \\ &= 0 + \sum_{k=1}^{n-1} (3 \cdot 2^k - 2k - 3) \\ &= \frac{6(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} - 2 \cdot \frac{1}{2} n(n-1) - 3(n-1) \\ &= 3 \cdot 2^n - n^2 - 2n - 3 \end{aligned}$$

であり、これは $n = 1$ の場合も成り立つ。

【解答】

(1)	ア	
	$y = ae^{ax}x + (1-at)e^{at}$	
(2)	イ	ウ
	$\frac{1}{a}$	$\frac{e-2}{2a}$
(3)	エ	
	$\frac{\pi(e^2-3)}{6a}$	
(4)	オ	
	$y = \frac{1}{a} \log x$	
(5)	カ	キ
	1	$e-2$
(6)	ク	
	$\frac{2\pi(3-e)}{3a^2}$	

【解説】

(1)

$$y = f(x) = e^{ax} \text{ とおくと,}$$

$$y' = ae^{ax}$$

だから, 点 (t, e^{at}) における接線 ℓ の方程式は,

$$\begin{aligned} y &= ae^{at}(x-t) + e^{at} \\ &= ae^{at}x + (1-at)e^{at} \end{aligned}$$

である。

(2)

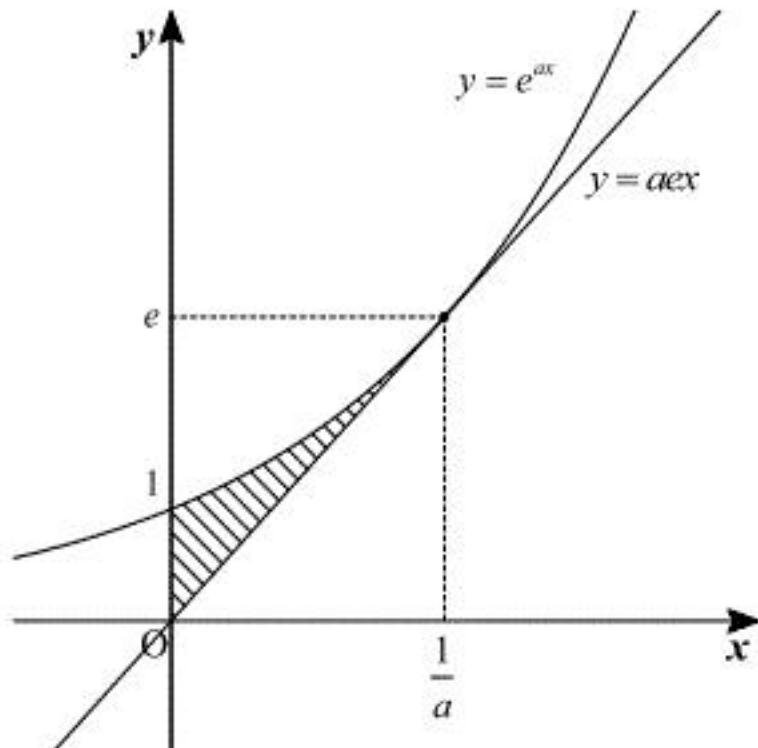
接線 ℓ が原点 $(0, 0)$ を通るとき, $e^{at} > 0, a > 0$ より,

$$\begin{aligned} 0 &= (1-at)e^{at} \\ \Leftrightarrow 1-at &= 0 \quad (\because e^{at} > 0) \\ \therefore t &= \frac{1}{a} \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

である。このとき, 接線の方程式は,

$$y = aex$$

となるから, 曲線 $y = e^{ax}$ と接線 $y = aex$, および y 軸で囲まれた図形 D は, 下図の斜線部のようになる。



上図より, D の面積は,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{a}} e^{ax} dx - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a} \cdot e &= \left[\frac{e^{ax}}{a} \right]_0^{\frac{1}{a}} - \frac{e}{2a} \\ &= \frac{e}{a} - \frac{1}{a} - \frac{e}{2a} \\ &= \frac{e-2}{2a} \end{aligned}$$

である。

(3)

求める体積を V_x とおくと,

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_0^{\frac{1}{a}} (e^{ax})^2 dx - \frac{1}{3} \cdot \pi e^2 \cdot \frac{1}{a} \\ &= \pi \left[\frac{e^{2ax}}{2a} \right]_0^{\frac{1}{a}} - \frac{\pi e^2}{3a} \\ &= \pi \cdot \frac{e^2-1}{2a} - \frac{\pi e^2}{3a} \\ &= \frac{\pi(e^2-3)}{6a} \end{aligned}$$

である。

(4)

$y = f(x)$ について, $a > 0$ であることに注意すると,

$$\begin{aligned} y &= e^{ax} \\ \Leftrightarrow \log y &= ax \\ \therefore x &= \frac{1}{a} \log y \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

であるから, $y = f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ は,

$$y = \frac{1}{a} \log x$$

である。

(5)

与式を計算すると,

$$\begin{aligned} \int_1^e \log x dx &= [x \log x - x]_1^e \\ &= 1 \\ \int_1^e (\log x)^2 dx &= \int_1^e 1 \cdot (\log x)^2 dx \\ &= \left[x (\log x)^2 \right]_1^e - \int_1^e x \cdot (2 \log x) \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= e - \int_1^e 2 \log x dx \\ &= e - 2 \end{aligned}$$

となる。

(6)

求める体積を V_y とおくと,

$$\begin{aligned} V_y &= \frac{1}{3} \cdot \pi \left(\frac{1}{a} \right)^2 \cdot e - \pi \int_1^e x^2 dy \\ &= \frac{\pi e}{3a^2} - \pi \int_1^e \left(\frac{1}{a} \log y \right)^2 dy \\ &= \frac{\pi e}{3a^2} - \frac{\pi}{a^2} \int_1^e (\log y)^2 dy \\ &= \frac{\pi e}{3a^2} - \frac{\pi}{a^2} (e-2) \\ &= \frac{2\pi(3-e)}{3a^2} \end{aligned}$$

である。