

【解答】

ア		イ		ウ		エ
$\frac{\sqrt{13}+3}{4}$		$\frac{\sqrt{13}-1}{6}$		5952		180
オ	カ	キ	ク	ケ	コ	
5	$4\sqrt{2}$	$8\sqrt{2}$	2^n	$\frac{2^{2n}-1}{(2n+1)!}$	$\frac{\sqrt{51}}{3}$	

【解説】

(1)

$$\frac{12}{\sqrt{13}+1} = \frac{12(\sqrt{13}-1)}{13-1} = \sqrt{13}-1$$

である。ここで、

$$3 < \sqrt{13} < 4 \Leftrightarrow 2 < \sqrt{13}-1 < 3$$

であるから、

$$b = \sqrt{13}-1-2 = \sqrt{13}-3$$

となる。よって、

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{\sqrt{13}-3} = \frac{\sqrt{13}+3}{13-9} = \frac{\sqrt{13}+3}{4}$$

である。

(2)

 $k \neq 0$ に注意すると、

$$\begin{aligned} f(x) &= kx^2 - 2x - 3k^2 + 2k + 5 \\ &= k\left(x^2 - \frac{2}{k}x + \frac{1}{k^2}\right) - \frac{1}{k} - 3k^2 + 2k + 5 \\ &= k\left(x - \frac{1}{k}\right)^2 - \frac{1}{k} - 3k^2 + 2k + 5 \end{aligned}$$

であり、 $k > 0$ より、 $f(x)$ は $x = \frac{1}{k}$ で最小値をとる。ここで、最小値が 3 であるから

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{k}\right) &= 3 \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{k} - 3k^2 + 2k + 5 &= 3 \\ \Leftrightarrow -1 - 3k^3 + 2k^2 + 2k &= 0 \quad (\because k \neq 0) \\ \Leftrightarrow 3k^3 - 2k^2 - 2k + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (k-1)(3k^2 + k - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (k-1)\left(k - \frac{-1+\sqrt{13}}{6}\right)\left(k - \frac{-1-\sqrt{13}}{6}\right) &= 0 \end{aligned}$$

となる。したがって、 $k \neq 1, k > 0$ より、 $k = \frac{\sqrt{13}-1}{6}$ である。

(3)

1680 を素因数分解すると、 $1680 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ である。したがって、正の約数の和は、

$$(1+2+2^2+2^3+2^4)(1+3)(1+5)(1+7) = 31 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 = 5952$$

である。

(4)

 $1-x^2=t \Leftrightarrow x^2=1-t$ とおくと、 $2xdx=-dt$ であり

$$\begin{array}{c|cc} x & 0 & \rightarrow & 1 \\ t & 1 & \rightarrow & 0 \end{array}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^3 (1-x^2)^8 dx &= \int_0^1 x^2 \cdot (1-x^2)^8 \cdot x dx \\ &= \int_1^0 (1-t)t^8 \cdot \left(-\frac{1}{2}dt\right) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (t^8 - t^9) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{9}t^9 - \frac{1}{10}t^{10} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) \\ &= \frac{1}{180} \end{aligned}$$

である。

(5)

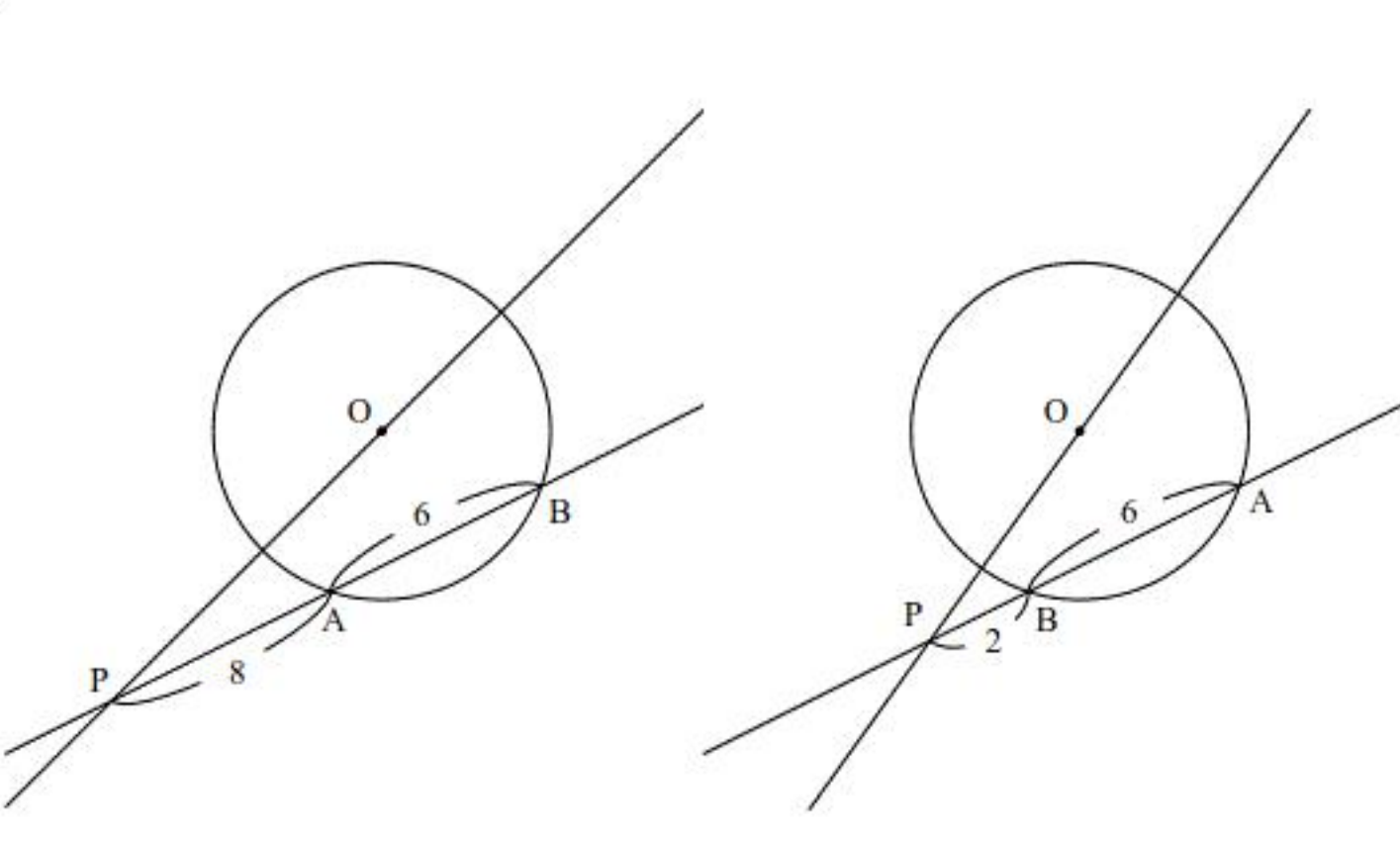
$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 1 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ = 2 \\ \vec{b} \cdot \vec{c} &= 4 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 90^\circ = 0 \\ \vec{c} \cdot \vec{a} &= \sqrt{2} \cdot 1 \cdot \cos 45^\circ = 1 \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{c} \cdot \vec{a} \\ &= 1 + 16 + 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ &= 25 \\ \therefore |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| &= 5 \quad (\because |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| \geq 0) \end{aligned}$$

である。

(6)



3 点が P, A, B の順に並んでいるとき、方べきの定理より、

$$\begin{aligned} PA \cdot PB &= (OP-4) \cdot (OP+4) \\ \Leftrightarrow 8 \cdot (8+6) &= OP^2 - 16 \\ \Leftrightarrow 112 &= OP^2 - 16 \\ \Leftrightarrow OP^2 &= 128 \\ \therefore OP &= 8\sqrt{2} \quad (\because OP > 0) \end{aligned}$$

である。また、3 点が P, B, A の順に並んでいるとき、同様に方べきの定理より、

$$\begin{aligned} PA \cdot PB &= (OP-4) \cdot (OP+4) \\ \Leftrightarrow 8 \cdot (8-6) &= OP^2 - 16 \\ \Leftrightarrow 16 &= OP^2 - 16 \\ \Leftrightarrow OP^2 &= 32 \\ \therefore OP &= 4\sqrt{2} \quad (\because OP > 0) \end{aligned}$$

となる。したがって、 $\boxed{カ}$ は $4\sqrt{2}$ であり、 $\boxed{キ}$ は $8\sqrt{2}$ である。

(7)

二項定理より、

$$(a+b)^n = {}_n C_0 \cdot a^n + {}_n C_1 \cdot a^{n-1}b + {}_n C_2 \cdot a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_n C_n \cdot b^n$$

が成り立つから、 $a=b=1$ を代入して、

$${}_n C_0 + {}_n C_1 + {}_n C_2 + \cdots + {}_n C_n = (1+1)^n = 2^n$$

である。また、

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1!(2n)!} + \frac{1}{2!(2n-1)!} + \frac{1}{3!(2n-2)!} + \cdots + \frac{1}{n!(n+1)!} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1!(2n)!} + \frac{1}{2!(2n-1)!} + \cdots + \frac{1}{n!(n+1)!} + \cdots + \frac{1}{(2n)!1!} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n+1)!} \left\{ \frac{(2n+1)!}{1!(2n)!} + \frac{(2n+1)!}{2!(2n-1)!} + \frac{(2n+1)!}{3!(2n-2)!} + \cdots + \frac{(2n+1)!}{(2n)!1!} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n+1)!} ({}_{2n+1} C_1 + {}_{2n+1} C_2 + {}_{2n+1} C_3 + \cdots + {}_{2n+1} C_{2n}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n+1)!} \{ 2^{2n+1} - ({}_{2n+1} C_0 + {}_{2n+1} C_{2n+1}) \} \\ &= \frac{2^{2n+1} - 2}{2 \cdot (2n+1)!} \\ &= \frac{2^{2n} - 1}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

である。

(8)

解と係数の関係より、

$$\alpha\beta = \frac{5}{3}, \alpha + \beta = -\frac{13}{3}$$

である。また、判別式を D とおくと、

$$D = 13^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 109$$

より、この方程式は重解を持たない。すなわち、 $\alpha \neq \beta$ である。ここで、放物線 $y = \alpha x^2 + px + \beta$ について、

$$y = \alpha x^2 + px + \beta = \alpha \left(x + \frac{p}{2\alpha} \right)^2 - \frac{p^2}{4\alpha} + \beta$$

であることから、この放物線は準線 $y = -\frac{1}{4\alpha}$ である放物線 $y = \alpha x^2$ を x 軸方向に $-\frac{1}{2\alpha}$ 、 y 軸方向に $-\frac{p^2}{4\alpha} + \beta$ 平行移動させたものである。したがって、準線は

$$y = -\frac{1}{4\alpha} - \frac{p^2}{4\alpha} + \beta = -\frac{p^2+1}{4\alpha} + \beta$$

である。同様に、放物線 $y = \beta x^2 + px + \alpha$ の準線は

$$y = -\frac{p^2+1}{4\beta} + \alpha$$

である。これらが一致するとき、

$$\begin{aligned} -\frac{p^2+1}{4\alpha} + \beta &= -\frac{p^2+1}{4\beta} + \alpha \\ \Leftrightarrow -(p^2+1) \left(\frac{1}{4\alpha} - \frac{1}{4\beta} \right) &= \alpha - \beta \\ \Leftrightarrow -(p^2+1) \frac{\beta - \alpha}{4\alpha\beta} + (\beta - \alpha) &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(1 - \frac{p^2+1}{4\alpha\beta} \right) (\beta - \alpha) &= 0 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\alpha \neq \beta$ より、 $\frac{p^2+1}{4\alpha\beta} = 1$ である。したがって、 $\alpha\beta = \frac{5}{3}$ であることから、

$$\begin{aligned} p^2 + 1 &= 4\alpha\beta \\ \Leftrightarrow p^2 &= 4 \cdot \frac{5}{3} - 1 \\ \Leftrightarrow p^2 &= \frac{17}{3} \\ \therefore p &= \frac{\sqrt{51}}{3} \quad (\because p > 0) \end{aligned}$$

である。

【解答】

ア	イ	ウ	エ
$\frac{24}{25}$	$\frac{729}{1000}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$
オ	カ	キ	ク
$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{17}{18}$

【解説】

(1)(i)

余事象を用いて考える。どの種も発芽しない確率は、

$$\left(1 - \frac{3}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$$

であるから、少なくとも1粒が発芽する確率は、

$$1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}$$

となる。

(ii)

ある1つの花壇で少なくとも1粒が発芽する確率は、余事象を用いて考えると

$$1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

である。したがって、すべての花壇でそれぞれ少なくとも1粒が発芽する確率は、

$$\left(\frac{9}{10}\right)^3 = \frac{729}{1000}$$

である。

(2)(i)

2個のさいころの出た目の和について、以下のような表を得る。

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

したがって、出た目の和 n 、出た目の和が n になる確率 p_n 、そのときの a, b, c, d の値を表にすると以下ようになる。

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_n	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
a	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0
b	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
c	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
d	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

上表より、 $a=1$ となるのは $n=5, 9$ のときであり、確率は、

$$\frac{4}{36} + \frac{4}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

である。同様に、 $b=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ となるのは $n=4, 5, 10, 11$ のときであり、確率は、

$$\frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

である。また、 $c=\frac{\sqrt{2}}{2}$ となるのは $n=3, 9, 11$ のときで、確率は、

$$\frac{2}{36} + \frac{4}{36} + \frac{2}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

であり、 $d=\frac{1}{2}$ となるのは $n=5$ のときで、確率は、

$$\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

である。

(ii)

上表より、 a, b, c, d のうち少なくとも1つが0であるのは、

$$n=2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12$$

のときであり、求める確率は、

$$\frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{5}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{1}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

である。

(iii)

上表より、 a, b, c, d のうち少なくとも1つが負であるのは、

$$n=3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$$

のときであり、求める確率は、

$$\frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} = \frac{34}{36} = \frac{17}{18}$$

である。

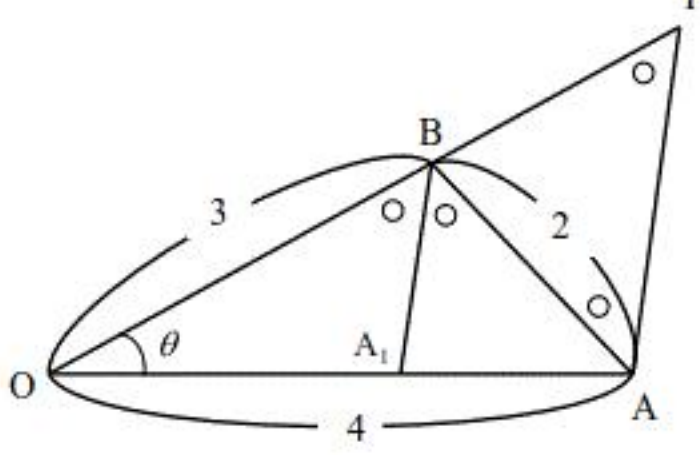
【解答】

ア	イ	ウ	エ	オ
$\frac{7}{8}$	5	$\sqrt{6}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{8}{5}$
カ	キ	ク	ケ	
$\frac{3\sqrt{15}}{10}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{10+3\sqrt{6}}{2}$	$\frac{15\sqrt{15}}{32}$	

【解説】

(1)

$\triangle OAB$ と点 P, A_1 を図示すると以下のようになる。



これより、 $\triangle OAB$ に余弦定理を用いて、

$$\cos \theta = \frac{-AB^2 + OA^2 + OB^2}{2 \cdot OA \cdot OB} = \frac{-4 + 9 + 16}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{7}{8}$$

である。

(2)

PA と BA_1 は平行で、 BA_1 は $\angle OBA$ の二等分線であることから、

$$\angle OBA_1 = \angle ABA_1 = \angle BAP = \angle BPA$$

である。 $\triangle BPA$ は二等辺三角形なので、 $BP = BA = 2$ であるから、

$$OP = OB + BP = 3 + 2 = 5$$

となる。したがって $\triangle OPA$ について、余弦定理より

$$AP^2 = OP^2 + OA^2 - 2 \cdot OP \cdot OA \cdot \cos \theta = 25 + 16 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{7}{8} = 6$$

$$\therefore AP = \sqrt{6}$$

である。

(3)

角の二等分線の性質より、

$$OA_1 : A_1A = OB : AB = 3 : 2$$

であるから、

$$OA_1 = 4 \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{5}$$

$$A_1A = 4 \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$$

である。

(4)

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ より $\sin \theta > 0$ であるから、

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

である。また、

$$\triangle ABA_1 : \triangle OAB = AA_1 : OA = 2 : 5$$

であるから、

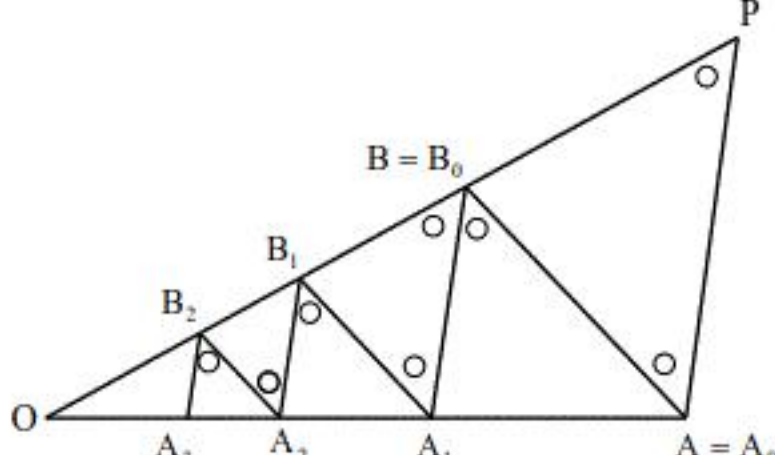
$$\triangle ABA_1 = \frac{2}{5} \cdot \triangle OAB$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \sin \theta$$

$$= \frac{3\sqrt{15}}{10}$$

となる。

(5)(i)



A を A_0 、 B を B_0 と表記することにする。 $A_0P, A_1B_0, \dots, A_{n+1}B_n, A_{n+2}B_{n+1}, \dots$ と

$A_0B_0, A_1B_1, \dots, A_nB_n, A_{n+1}B_{n+1}, \dots$ はそれぞれすべて平行であるから、 $n = 0, 1, 2, \dots$ について、

$$\angle A_nB_nA_{n+1} = \angle A_{n+1}B_{n+1}A_{n+2}$$

$$\angle B_nA_nA_{n+1} = \angle B_{n+1}A_{n+1}A_{n+2}$$

が成り立つから、

$$\triangle A_nB_nA_{n+1} \sim \triangle A_{n+1}B_{n+1}A_{n+2}$$

である。ここで、 $B_nA_n \parallel B_{n+1}A_{n+1}$ より、

$$A_nA_{n+1} : OA_{n+1} = B_nB_{n+1} : OB_{n+1}$$

である。また、 $\angle B_{n+1}A_{n+1}B_n = \angle B_{n+1}B_nA_{n+1}$ であることから、

$$B_nB_{n+1} = B_{n+1}A_{n+1}$$

である。このとき、角の二等分線の性質から、

$$OB_{n+1} : B_{n+1}A_{n+1} = OA_{n+2} : A_{n+2}A_{n+1}$$

であることを用いると、

$$OA_{n+2} : A_{n+2}A_{n+1} = OB_{n+1} : B_{n+1}A_{n+1}$$

$$= OB_{n+1} : B_nB_{n+1}$$

$$= OA_{n+1} : A_nA_{n+1}$$

$$= OA_1 : A_1A$$

$$= 3 : 2$$

となる。 $OA_{n+1} = OA_{n+2} + A_{n+2}A_{n+1}$ であることから、

$$A_{n+2}A_{n+1} = \frac{2}{5}OA_{n+1}$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{2} A_nA_{n+1}$$

$$= \frac{3}{5} A_nA_{n+1}$$

となるので、 $\triangle A_nB_nA_{n+1}$ と $\triangle A_{n+1}B_{n+1}A_{n+2}$ の相似比は $5:3$ であることがわかる。ここで、

$$A_1A_2 = A_1A \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$$

であり、

$$A_{2n+1}A_{2n+2} = \frac{3}{5} \cdot A_{2n}A_{2n+1}$$

$$= \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot A_{2n-1}A_{2n}$$

$$= \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot A_{2(n-1)+1}A_{2(n-1)+2}$$

であることから、 $A_1A_2 + A_3A_4 + A_5A_6 + \dots + A_{2n+1}A_{2n+2} + \dots$ は初項 $\frac{24}{25}$ 、公比 $\frac{9}{25}$ の無限等比級数の和である。よって、求める値は

$$\frac{\frac{24}{25}}{1 - \frac{9}{25}} = \frac{3}{2}$$

である。

(ii)

$$(AB + BA_1) + (A_1B_1 + B_1A_2) + (A_2B_2 + B_2A_3) + \dots + (A_nB_n + B_nA_{n+1}) + \dots$$

の値を考えればよい。

$$AB + BA_1 = 2 + \frac{3}{5}AP = 2 + \frac{3\sqrt{6}}{5}$$

より、求める値は初項 $2 + \frac{3\sqrt{6}}{5}$ 、公比 $\frac{3}{5}$ の無限等比級数の和であるから、

$$\frac{2 + \frac{3\sqrt{6}}{5}}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{10 + 3\sqrt{6}}{5} \cdot \frac{5}{2} = \frac{10 + 3\sqrt{6}}{2}$$

となる。

(iii)

$\triangle A_nB_nA_{n+1}$ と $\triangle A_{n+1}B_{n+1}A_{n+2}$ の相似比は $5:3$ であることから、 $\triangle A_nB_nA_{n+1}$ と $\triangle A_{n+1}B_{n+1}A_{n+2}$ の面積比は

$$5^2 : 3^2 = 25 : 9$$

である。したがって、求める値は初項 $\frac{3\sqrt{15}}{10}$ 、公比 $\frac{9}{25}$ の無限等比級数の和であるから、

$$\frac{\frac{3\sqrt{15}}{10}}{1 - \frac{9}{25}} = \frac{3\sqrt{15}}{10} \cdot \frac{25}{16} = \frac{15\sqrt{15}}{32}$$

である。