

【解答】

ア		イ		ウ	
$\frac{85}{127}$		$\frac{e^4 - e^{-4}}{4}$		$\frac{403}{120}$	
エ	オ	カ	キ		
$3 - \sqrt{2}$	$3 + \sqrt{2}$	-6	1		

【解説】

(1)

店 A (1 回目), 店 B , 店 A (2 回目) に傘を忘れるという事象をそれぞれ A_1, B_1, A_2 とすると, それぞれの事象の確率は

$$\begin{aligned} P(A_1) &= \frac{1}{7} \\ P(B_1) &= \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{7} = \frac{6}{49} \\ P(A_2) &= \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{7} = \frac{36}{343} \end{aligned}$$

となる。求める確率は, 傘を忘れたという条件のもとで, それが店 A である確率だから

$$\frac{P(A_1) + P(A_2)}{P(A_1) + P(B_1) + P(A_2)} = \frac{\frac{85}{343}}{\frac{127}{343}} = \frac{85}{127}$$

である。

(2)

$f(x) = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{4}$ とおくと, 曲線 $y = f(x)$ の $0 \leq x \leq 2$ の部分の長さは

$$\begin{aligned} \int_0^2 \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx &= \int_0^2 \sqrt{1 + \left(\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}\right)^2} dx \\ &= \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{e^{4x} - 2 + e^{-4x}}{4}} dx \\ &= \int_0^2 \sqrt{\frac{e^{4x} + 2 + e^{-4x}}{4}} dx \\ &= \int_0^2 \sqrt{\left(\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}\right)^2} dx \\ &= \int_0^2 \left|\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}\right| dx \end{aligned}$$

となる。ここで, $\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} \geq 0$ より, $\left|\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}\right| = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}$ であるから

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} dx &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (e^{2x} - e^{-2x}) \right]_0^2 \\ &= \frac{e^4 - e^{-4}}{4} \end{aligned}$$

となる。

(3)

1800 は平方数ではないから, 正の約数の個数は偶数個である。 n を自然数として, 1800 の正の約数を小さいほうから順に $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ とする。このとき, 1800 の正の約数の総和を S_1 , 1800 の正の約数の逆数の総和を S_2 とすると

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{a_k} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{a_k} + \frac{1}{a_{2n+1-k}} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k + a_{2n+1-k}}{a_k \cdot a_{2n+1-k}} \right) \end{aligned}$$

となる。ここで, k の値によらず, $a_k \cdot a_{2n+1-k} = 1800$ であるから

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k + a_{2n+1-k}}{1800} \right) \\ &= \frac{1}{1800} \sum_{k=1}^n (a_k + a_{2n+1-k}) \\ &= \frac{1}{1800} \sum_{k=1}^{2n} a_k \end{aligned}$$

であり, $\sum_{k=1}^{2n} a_k = S_1$ である。 $1800 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ より

$$S_1 = (1 + 2 + 2^2 + 2^3)(1 + 3 + 3^2)(1 + 5 + 5^2) = 6045$$

となるから

$$S_2 = \frac{S_1}{1800} = \frac{403}{120}$$

となる。

(4)

a, b が 1 以外の正の定数のとき, 2 次方程式

$$x^2 - x \log ab + (\log a^2)(\log b) = 0$$

が重解を持つならば, 方程式の判別式を D として

$$\begin{aligned} D &= 0 \\ \Leftrightarrow (-\log ab)^2 - 4(\log a^2)(\log b) &= 0 \\ \Leftrightarrow (\log a + \log b)^2 - 8(\log a)(\log b) &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。 a は 1 以外の正の定数であるから, $\log a \neq 0$ である。ゆえに上の式の両辺を

$(\log a)^2 (\neq 0)$ で割ると

$$\begin{aligned} (\log a + \log b)^2 - 8(\log a)(\log b) &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(1 + \frac{\log b}{\log a}\right)^2 - 8 \cdot \frac{\log b}{\log a} &= 0 \\ \Leftrightarrow (1 + \log_a b)^2 - 8 \log_a b &= 0 \\ \Leftrightarrow (\log_a b)^2 - 6 \log_a b + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \log_a b = 3 \pm 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。よって, 以下複号同順として

$$\begin{aligned} \log_b a &= \frac{1}{\log_a b} \\ &= \frac{1}{3 \pm 2\sqrt{2}} \\ &= \frac{3 \mp 2\sqrt{2}}{(3 \pm 2\sqrt{2})(3 \mp 2\sqrt{2})} \\ &= 3 \mp 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

である。ゆえに, $\log_a b, \log_b a$ を解にもつ 2 次方程式は $x^2 - 6x + 1 = 0$ である。

【解答】

ア	イ	ウ	エ	オ
$3n$	4	6	$3n-3$	5
カ	キ	ク	ケ	
8	34	$3n-4$	144	

【解説】

(1)

階数 k のタワー T の第 l 階に含まれる積み木の本数 $T(l)$ について、 $\sum_{l=1}^k T(l)$ はすべての階の積み木の本数の合計である。積み木の本数は初期状態から変わらないので

$$\sum_{l=1}^k T(l) = 3n$$

である。

(2)

問題文より、階数 k のタワー T について、 $T(k-2)=2$ または $T(k)=2$ である。一般の自然数 n に対して k を最大にするためには $T(l)=1$ となる階ができるだけ多くなるようにすればよい。よって、 $T(k-2)$ と $T(k)$ の一方だけが 2 であることが必要で

$$T(l)=1 \ (1 \leq l \leq M-3) \text{ かつ } T(M-2)=2 \text{ かつ } T(M-1)=3 \text{ かつ } T(M)=1$$

または

$$T(l)=1 \ (1 \leq l \leq M-2) \text{ かつ } T(M-1)=3 \text{ かつ } T(M)=2$$

となればよい。どちらの場合も $\sum_{l=1}^k T(l) = M+3$ であることと、(1)の結果より、 $\sum_{l=1}^k T(l) = 3n$ で

あることから

$$\begin{aligned} M+3 &= 3n \\ \Leftrightarrow M &= 3n-3 \end{aligned}$$

となる。ゆえに、 $n=3$ のときは k の最大値は 6 である。また、 $n=3$ のときについて、 k を最小にするためには $T(l)=2$ となる階ができるだけ多くなるようにすればよい。よって

$$T(1)=T(2)=2, T(3)=3, T(4)=2$$

のときであり、このとき $k=4$ である。以上のことより、 $n=3$ のとき、 $4 \leq k \leq 6$ となる。

(3)

まず、すべての項が 1 または 2 であり、総和が N となるような数の並べ方を A_N とし、並べ方の総数を x_N とする。 A_{N+2} は

- A_N に 2 の項を 1 つ加えたもの
- A_{N+1} に 1 の項を 1 つ加えたもの

の 2 パターンであるから、

$$x_{N+2} = x_{N+1} + x_N$$

が成り立つ。ただし、 A_1 は $\{1\}$ の 1 種類、数列 A_2 は $\{1, 1\}$ と $\{2\}$ の 2 種類あるから、 $x_1=1, x_2=2$ である。つまり、 x_N は N を l に置き換えると問題文における $F(l)$ と一致する。続いて、階数 k のタワー T について考える。実現可能な T は

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^k T(l) &= 3n \\ T(l) &= 1 \text{ または } 2 \ (l \neq k-1) \\ T(k-1) &= 3 \\ T(k-2) &= 2 \text{ または } T(k) = 2 \end{aligned}$$

の 4 つをすべて満たす。これらの条件を条件①とする。まず、 $n=3$ かつ $k=5$ のとき条件①は

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^5 T(l) &= 9 \\ T(l) &= 1 \text{ または } 2 \ (l \neq 4) \\ T(4) &= 3 \\ T(3) &= 2 \text{ または } T(5) = 2 \end{aligned}$$

であるから、これらを満たす $T(l)$ の組み合わせは $l=1$ から順に左から書き出すと

- 1, 2, 2, 3, 1
- 2, 1, 2, 3, 1
- 1, 2, 1, 3, 2
- 2, 1, 1, 3, 2
- 1, 1, 2, 3, 2

となり、5通りである。また、一般の n に対して、条件①を次の 3 通りに場合分けして考える。

[1] $T(k-2)=2$ かつ $T(k) \neq 2$ のとき

$$\begin{aligned} &l=1 \text{ から順に} \\ &T(1), T(2), \dots, T(k-3), 2, 3, 1 \end{aligned}$$

となる。つまり

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{k-3} T(l) &= 3n-7 \\ T(l) &= 1 \text{ または } 2 \ (1 \leq l \leq k-3) \end{aligned}$$

の両方を満たす $T(l)$ の組み合わせの数を考えればよい。すなわち、すべての項が 1 または 2 であり、総和が $3n-6$ となるような数字の並び替えの総数を考えればよい。これは上記の通り、 $F(3n-6)$ である。

[2] $T(k-2) \neq 2$ かつ $T(k)=2$ のとき

$$\begin{aligned} &l=1 \text{ から順に} \\ &T(1), T(2), \dots, T(k-3), 1, 3, 2 \end{aligned}$$

となる。つまり

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{k-3} T(l) &= 3n-6 \\ T(l) &= 1 \text{ または } 2 \ (1 \leq l \leq k-3) \end{aligned}$$

の両方を満たす $T(l)$ の組み合わせの数を考えればよい。すなわち、すべての項が 1 または 2 であり、総和が $3n-6$ となるような数字の並び替えの総数を考えればよい。これは上記の通り、 $F(3n-6)$ である。

[3] $T(k-2)=2$ かつ $T(k)=2$ のとき

$$\begin{aligned} &l=1 \text{ から順に} \\ &T(1), T(2), \dots, T(k-3), 2, 3, 2 \end{aligned}$$

となる。つまり

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{k-3} T(l) &= 3n-7 \\ T(l) &= 1 \text{ または } 2 \ (1 \leq l \leq k-3) \end{aligned}$$

の両方を満たす $T(l)$ の組み合わせの数を考えればよい。すなわち、すべての項が 1 または 2 であり、総和が $3n-7$ となるような数字の並び替えの総数を考えればよい。これは上記の通り、 $F(3n-7)$ である。

以上、[1], [2], [3]より

$$J(n) = F(3n-6) + F(3n-6) + F(3n-7)$$

が成り立つ。 $F(n+2)=F(n+1)+F(n)$ であることを用いると、

$$\begin{aligned} J(n) &= F(3n-6) + \{F(3n-6) + F(3n-7)\} \\ &= F(3n-6) + F(3n-5) \\ &= F(3n-4) \end{aligned}$$

となる。数列 $\{F(n)\}$ は $\{F(n)\} = 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$ を満たすから

$$J(3) = F(5) = 8, J(4) = F(8) = 34, J(5) = F(11) = 144$$

となる。

【解答】

ア	イ	ウ	エ	オ
$8-8i$	$7x^3-35x^2+21x-1$	$\frac{\pi}{7}$	$\frac{2}{7}\pi$	$\frac{3}{7}\pi$
カ	キ	ク	ケ	
7	$\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{b^2}$	$\frac{1}{c^2}$	
コ	サ	シ	ス	
$2n+1$	$-\frac{(2n+1)n(2n-1)}{3}$	$\frac{n(2n-1)}{3}$	$\frac{\pi^2}{6}$	

【解説】

(1)

$$(1+i)^7 = \left\{ \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right\}^7 \quad \text{について、ド・モアブルの定理より}$$

$$\left\{ \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right\}^7 = (\sqrt{2})^7 \left(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi \right)$$

$$= 8\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1-i)$$

$$= 8-8i$$

となる。

(2)

$$(\sqrt{x}+i)^7 \quad \text{について}$$

$$(\sqrt{x}+i)^2 = (x-1) + 2\sqrt{x}i$$

$$(\sqrt{x}+i)^3 = (x-1+2\sqrt{x}i)(\sqrt{x}+i) = (x-3)\sqrt{x} + (3x-1)i$$

$$(\sqrt{x}+i)^4 = \{(x-3)\sqrt{x} + (3x-1)i\}(\sqrt{x}+i) = (x^2-6x+1) + 4(x-1)\sqrt{x}i$$

であるから

$$(\sqrt{x}+i)^7 = (\sqrt{x}+i)^3 (\sqrt{x}+i)^4$$

$$= \{(x-3)\sqrt{x} + (3x-1)i\} \{(x^2-6x+1) + 4(x-1)\sqrt{x}i\}$$

となる。よって、 $(\sqrt{x}+i)^7$ の虚部は

$$(x-3)\sqrt{x} \cdot 4(x-1)\sqrt{x} + (3x-1) \cdot (x^2-6x+1) = 4(x^3-4x^2+3x) + (3x^3-19x^2+9x-1)$$

$$= 7x^3-35x^2+21x-1$$

である。

(3)

ド・モアブルの定理より

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^7 = \cos 7\theta + i \sin 7\theta$$

であり、これが実数のとき、 k を整数として

$$\sin 7\theta = 0$$

$$\Leftrightarrow 7\theta = k\pi$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{k\pi}{7}$$

となる。 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のもとでは、 $k=1, 2, 3$ であり、 $\theta = \frac{\pi}{7}, \frac{2}{7}\pi, \frac{3}{7}\pi$ である。

(4)

$(\cos \theta + i \sin \theta)^7$ について

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^7 = (\sin \theta)^7 \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} + i \right)^7$$

$$= (\sin \theta)^7 \left(\frac{1}{\tan \theta} + i \right)^7$$

であり、 $(\sin \theta)^7$ は実数であるから

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^7 \text{ が実数である}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\tan \theta} + i \right)^7 \text{ が実数である}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\tan \theta} + i \right)^7 \text{ の虚部が } 0 \text{ である}$$

が成り立つ。ここで(2)より $\left(\frac{1}{\tan \theta} + i \right)^7$ の虚部は $7\left(\frac{1}{\tan^2 \theta} \right)^3 - 35\left(\frac{1}{\tan^2 \theta} \right)^2 + 21 \cdot \frac{1}{\tan^2 \theta} - 1$ であるから

$$\left(\frac{1}{\tan \theta} + i \right)^7 \text{ の虚部が } 0 \text{ である}$$

$$\Leftrightarrow 7\left(\frac{1}{\tan^2 \theta} \right)^3 - 35\left(\frac{1}{\tan^2 \theta} \right)^2 + 21 \cdot \frac{1}{\tan^2 \theta} - 1 = 0$$

となる。また、(3)より、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のもとでは

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^7 \text{ が実数である}$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{7}, \frac{2}{7}\pi, \frac{3}{7}\pi$$

であるから、以上のことより $\theta = \frac{\pi}{7}, \frac{2}{7}\pi, \frac{3}{7}\pi$ のとき

$$7\left(\frac{1}{\tan^2 \theta} \right)^3 - 35\left(\frac{1}{\tan^2 \theta} \right)^2 + 21 \cdot \frac{1}{\tan^2 \theta} - 1 = 0$$

が成り立つ。つまり、3次方程式 $7x^3-35x^2+21x-1=0$ の解は

$$x = \frac{1}{\tan^2 \frac{\pi}{7}}, \frac{1}{\tan^2 \frac{2}{7}\pi}, \frac{1}{\tan^2 \frac{3}{7}\pi}$$

である。 $a = \tan \frac{\pi}{7}, b = \tan \frac{2}{7}\pi, c = \tan \frac{3}{7}\pi$ とするとき、それらは、 $x = \frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}$ と表される。

ゆえに

$$7x^3-35x^2+21x-1 = 7\left(x - \frac{1}{a^2}\right)\left(x - \frac{1}{b^2}\right)\left(x - \frac{1}{c^2}\right)$$

と因数分解される。

(5)

二項定理より

$$(\sqrt{x}+i)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} C_k i^k (\sqrt{x})^{(2n+1)-k}$$

であるから、虚部の x の n 次の係数と $(n-1)$ 次の係数はそれぞれ

$${}_{2n+1}C_1 = 2n+1$$

$${}_{2n+1}C_3 i^2 = -\frac{(2n+1)n(2n-1)}{3}$$

となる。 $(\sqrt{x}+i)^{2n+1}$ の虚部の x の n 次多項式を $P(x)$ とおく。(2)、(3)、(4)と同様に考えれば、

$$\frac{1}{\tan^2 \frac{k}{2n+1}\pi} \quad (k=1, 2, 3, \dots, n) \text{ は } n \text{ 次方程式 } P(x)=0 \text{ の } n \text{ 個の解である。つまり、解と係数の}$$

関係から

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\tan^2 \frac{k}{2n+1}\pi} = -\frac{-(2n+1)n(2n-1)}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\tan^2 \frac{1}{2n+1}\pi} + \frac{1}{\tan^2 \frac{2}{2n+1}\pi} + \dots + \frac{1}{\tan^2 \frac{n}{2n+1}\pi} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

となる。

(6)

$k=1, 2, 3, \dots, n$ に対して、 $\theta_k = \frac{k}{2n+1}\pi$ とおくと、すべての k について、 $0 < \theta_k < \frac{\pi}{2}$ が成り立

つ。このとき $\frac{1}{\tan^2 \theta_k} < \frac{1}{\theta_k^2} < \frac{1}{\sin^2 \theta_k}$ が成り立ち

$$\frac{1}{\tan^2 \theta_k} < \frac{1}{\theta_k^2} < \frac{1}{\sin^2 \theta_k}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\tan^2 \theta_k} < \frac{1}{\left(\frac{k}{2n+1}\pi \right)^2} < 1 + \frac{1}{\tan^2 \theta_k}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\tan^2 \theta_k} < \left(\frac{2n+1}{\pi} \right)^2 \cdot \frac{1}{k^2} < 1 + \frac{1}{\tan^2 \theta_k}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{2n+1} \right)^2 \cdot \frac{1}{\tan^2 \theta_k} < \frac{1}{k^2} < \left(\frac{\pi}{2n+1} \right)^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{\tan^2 \theta_k} \right)$$

となる。よって、 $k=1, 2, 3, \dots, n$ の総和をとり、(5)より $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\tan^2 \frac{k}{2n+1}\pi} = \frac{n(2n-1)}{3}$ を用いると

$$\left(\frac{\pi}{2n+1} \right)^2 \cdot \frac{1}{\tan^2 \theta_k} < \frac{1}{k^2} < \left(\frac{\pi}{2n+1} \right)^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{\tan^2 \theta_k} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{2n+1} \right)^2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{\tan^2 \theta_k} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < \left(\frac{\pi}{2n+1} \right)^2 \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{\tan^2 \theta_k} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{2n+1} \right)^2 \cdot \frac{n(2n-1)}{3} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < \left(\frac{\pi}{2n+1} \right)^2 \cdot \left\{ n + \frac{n(2n-1)}{3} \right\}$$

となる。さらに

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2n+1} \right)^2 \cdot \frac{n(2n-1)}{3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2+\frac{1}{n}} \right)^2 \cdot \frac{2-\frac{1}{n}}{3} = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2n+1} \right)^2 \cdot \left\{ n + \frac{n(2n-1)}{3} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2+\frac{1}{n}} \right)^2 \cdot \left\{ \frac{1}{n} + \frac{2-\frac{1}{n}}{3} \right\} = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\pi^2}{6}$$

となるから、はさみうちの原理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

である。