

【解答】

ア	イ	ウ
$\frac{14}{9}$	$\frac{417}{1250}$	18
エ	オ	カ
$x \leq \frac{3}{2}, \ x \geq 2$	43	69

【解説】

(1)

$$x = \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}, y = \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} \text{ のとき,}$$
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (x + y)^2 - 2xy \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} \right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} \\ &= \left\{ \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{2}) + (\sqrt{5} + \sqrt{2})}{(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2})} \right\}^2 - \frac{2}{3} \\ &= \left(\frac{2\sqrt{5}}{3} \right)^2 - \frac{2}{3} \\ &= \frac{20}{9} - \frac{2}{3} \\ &= \frac{14}{9} \end{aligned}$$

となる。

(2)

a, b が1以上50以下の整数の中から選ばれる確率は、どれも同様に確からしいとする。まず、 a, b の選び方は、

$$50 \cdot 50 = 2500 \text{ (通り)}$$

である。次に、1以上50以下の整数を、3で割った余りに応じて以下の3つの集合に分ける。

$$A = \{ \text{3で割った余りが0であるような1以上50以下の整数全体} \}$$
$$B = \{ \text{3で割った余りが1であるような1以上50以下の整数全体} \}$$
$$C = \{ \text{3で割った余りが2であるような1以上50以下の整数全体} \}$$

$a + b$ が3で割り切れるとき、 a, b が属する集合の組み合わせとして考えられるものは、

$$(A, A), (B, C), (C, B)$$

のいずれかである。ここで、 $n(A) = 16, n(B) = n(C) = 17$ より、 $a + b$ が3で割り切れるような

a, b の選び方は、

$$16 \cdot 16 + 17 \cdot 17 + 17 \cdot 17 = 834 \text{ (通り)}$$

である。以上より、 $a + b$ が3で割り切れる数である確率は

$$\frac{834}{2500} = \frac{417}{1250}$$

である。

(3)

300を素因数分解すると

$$300 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^2$$

となる。よって300の約数は、2を因数に持たないか1個持つ、2個持つ場合の3通り、3を因数に持たないか1個持つ場合の2通り、5を因数に持たないか1個持つ、2個持つ場合の3通りの組み合わせである。よって300の約数の個数は

$$3 \cdot 2 \cdot 3 = 18 \text{ 個}$$

である。

(4)

不等式 $x - 1 \leq |3x - 5|$ について、

$$\begin{aligned} 3x - 5 &< 0 \\ \Leftrightarrow x &< \frac{5}{3} \end{aligned}$$

となるから、 $x < \frac{5}{3}, x \geq \frac{5}{3}$ で場合分けをする。

$$[1] \ x < \frac{5}{3} \text{ のとき}$$

$$\begin{aligned} \text{このとき} \\ x - 1 &\leq -(3x - 5) \\ \Leftrightarrow x - 1 &\leq -3x + 5 \\ \Leftrightarrow 4x &\leq 6 \\ \Leftrightarrow x &\leq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

となる。 $x < \frac{5}{3}$ であるから、

$$x \leq \frac{3}{2}$$

となる。

$$[2] \ x \geq \frac{5}{3} \text{ のとき}$$

$$\begin{aligned} \text{このとき} \\ x - 1 &\leq 3x - 5 \\ \Leftrightarrow 2x &\geq 4 \\ \Leftrightarrow x &\geq 2 \end{aligned}$$

となる。 $x \geq \frac{5}{3}$ であるから、

$$x \geq 2$$

となる。

以上[1], [2]より、求める解は

$$x \leq \frac{3}{2}, \ x \geq 2$$

となる。

(5)

2進法で表された $101011_{(2)}$ を10進法で表すと

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 &= 1 + 2 + 8 + 32 \\ &= 43 \end{aligned}$$

となる。

(6)

6人の数学のテストの得点の平均値は68点より、

$$\begin{aligned} \frac{67 + 49 + 71 + 75 + 82 + a}{6} &= 68 \\ \Leftrightarrow 344 + a &= 408 \\ \therefore a &= 64 \end{aligned}$$

となる。6人の数学のテストの得点を小さい順に並べると

$$49, 64, 67, 71, 75, 82$$

であるから、6人の得点の中央値は

$$\frac{67 + 71}{2} = 69$$

である。

【解答】

ア	イ	ウ	エ
1	-4	$-1 < x < 3$	$x^2 - (2p+2)x + p^2 + 2p + q - 3$
オ	カ	キ	ク
$p \leq -2$	$p \geq -1$	1	-12

【解説】

(1)

2 次関数 $y = x^2 - 2x - 3$ を平方完成すると、
$$y = (x - 1)^2 - 4$$
となる。よって G_1 の頂点の座標は $(1, -4)$ である。

(2)

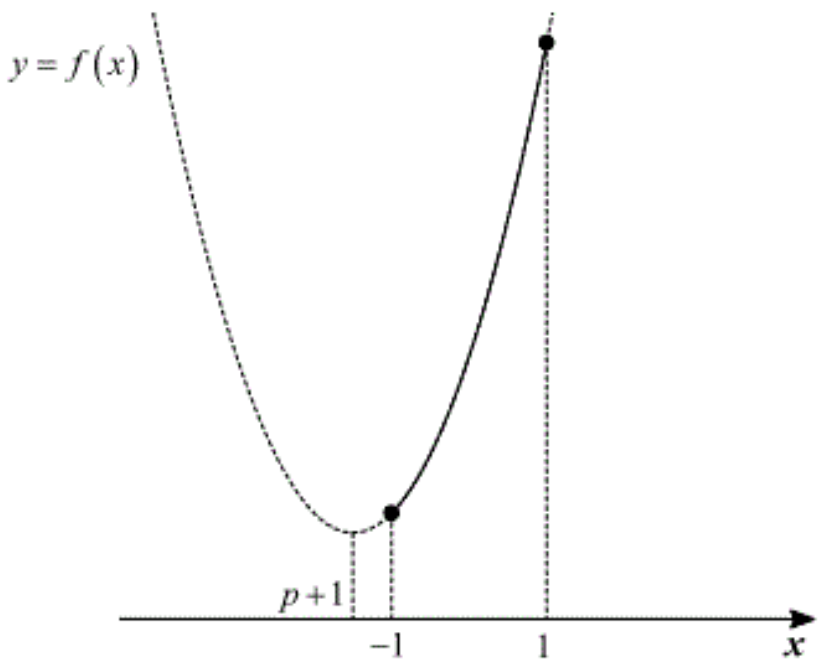
2 次不等式 $x^2 - 2x - 3 < 0$ の解は
$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 3 &< 0 \\ \Leftrightarrow (x + 1)(x - 3) &< 0 \\ \Leftrightarrow -1 < x < 3 \end{aligned}$$
となる。

(3)

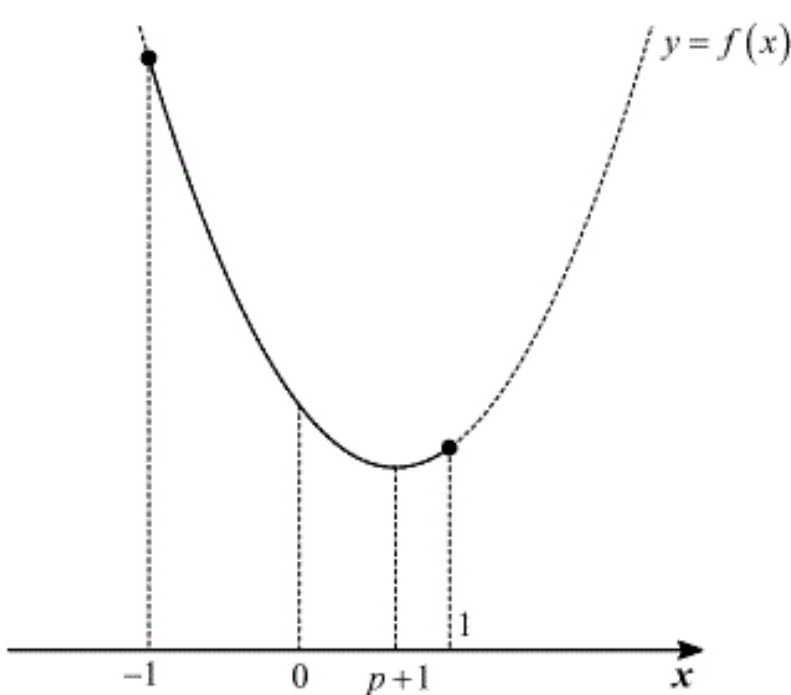
G_1 を x 軸方向に p 、 y 軸方向に q だけ平行移動すると
$$\begin{aligned} y - q &= (x - p)^2 - 2(x - p) - 3 \\ \therefore y &= x^2 - (2p + 2)x + p^2 + 2p + q - 3 \end{aligned}$$
となる。よって $f(x)$ は
$$f(x) = x^2 - (2p + 2)x + p^2 + 2p + q - 3$$
となる。

(4)

(3)より
$$f(x) = \{x - (p + 1)\}^2 + q - 4$$
となり、 $y = f(x)$ のグラフの頂点の座標は $(p + 1, q - 4)$ となる。 $-1 \leq x \leq 1$ における $y = f(x)$ の最小値が $f(-1)$ となるとき、 $y = f(x)$ のグラフの軸と x 軸の位置関係は以下のようになる。



上図より、 $y = f(x)$ のグラフの軸が $x \leq -1$ の範囲にあれば最小値が $f(-1)$ となる。したがって
$$\begin{aligned} p + 1 &\leq -1 \\ \therefore p &\leq -2 \end{aligned}$$
となる。また、 $-1 \leq x \leq 1$ における $y = f(x)$ の最大値が $f(-1)$ となるとき、 $y = f(x)$ のグラフの軸と x 軸の位置関係は以下のようになる。



上図より、 $y = f(x)$ のグラフの軸が $x \geq 0$ の範囲にあれば最大値が $f(-1)$ となる。したがって
(5)
 $f(x) = x^2 - (2p + 2)x + p^2 + 2p + q - 3$ は、下に凸の 2 次関数であるから、
2 次不等式 $f(x) < 0$ の解が $-2 < x < 6$
$$\Leftrightarrow f(x) = (x + 2)(x - 6) = x^2 - 4x - 12$$
である。したがって、係数を比較することで、
$$\begin{aligned} \begin{cases} 2p + 2 = 4 \\ p^2 + 2p + q - 3 = -12 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} p = 1 \\ q = -12 \end{cases} \end{aligned}$$
が得られる。

3

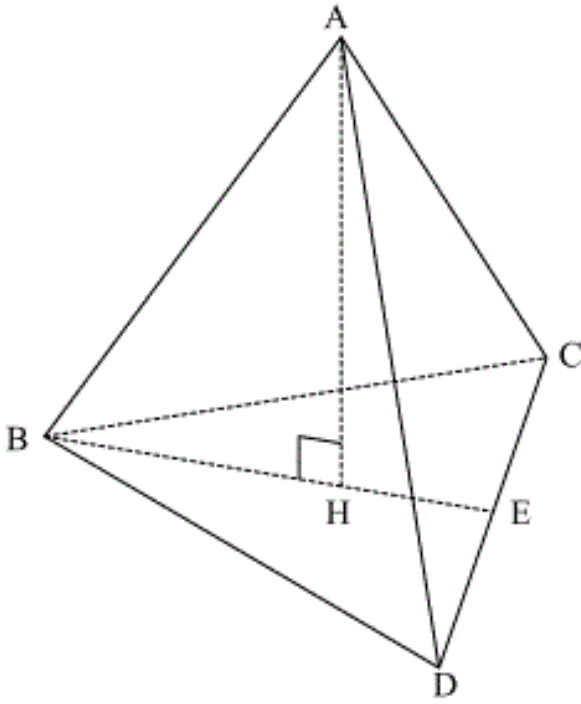
【解答】

ア	イ	ウ	エ
$\sqrt{3}$	$\sqrt{6}$	$\frac{3\sqrt{6}}{4}$	$\frac{9\sqrt{3}}{4}$
オ	カ	キ	ク
$\frac{9\sqrt{2}}{4}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$	$\frac{3\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$

【解説】

(1)

正四面体 ABCD と点 H を図示すると以下のようになる。



点 H は $\triangle BCD$ の重心であるから、線分 CD の中点を点 E とすると点 B, E, H は一直線上あり、点 H は線分 BE を 2:1 に内分する。線分 BE は、1 辺の長さが 3 の正三角形 BCD の高さである

から、その長さは $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ となる。よって

$$BH = \frac{2}{3}BE = \frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

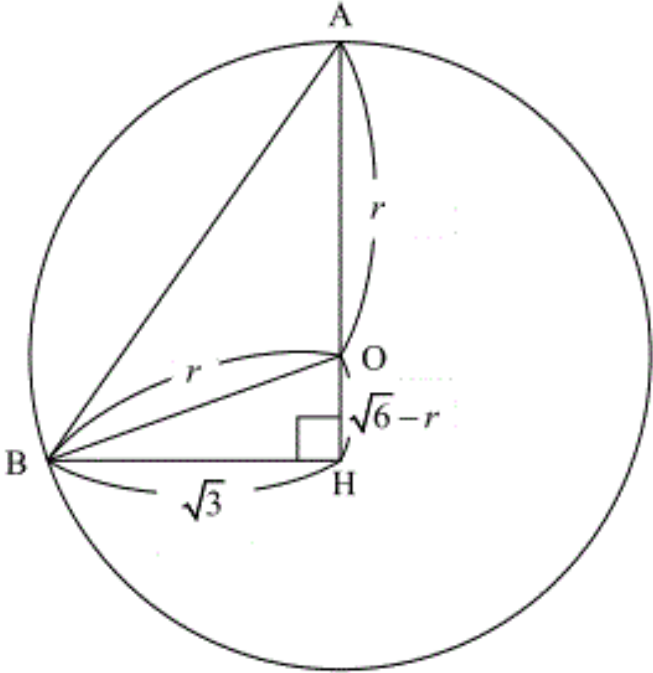
である。線分 AH の長さは $\triangle ABH$ に三平方の定理を用いて

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{9 - 3} = \sqrt{6}$$

である。

(2)

球 S の中心を O とする。正四面体 ABCD において、点 H は $\triangle BCD$ の重心であるから、点 O は線分 AH 上にある。球 S の、 $\triangle ABH$ を通る平面での断面図を図示すると以下のようになる。



上図より、 $\triangle OBH$ に三平方の定理を用いて

$$\begin{aligned} r^2 &= 3 + (\sqrt{6} - r)^2 \\ \Leftrightarrow r^2 &= 9 - 2\sqrt{6}r + r^2 \\ \Leftrightarrow r &= \frac{3\sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

である。

(3)

$\triangle BCD$ は 1 辺の長さが 3 の正三角形であるから、その面積は

$$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \sin 60^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

となる。 $\triangle BCD$ を底面とすると、正四面体 ABCD の高さは AH であるから、(1) より正四面体 ABCD の体積は

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{9\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{6} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$$

となる。また、球 S の体積は、(2) より半径が $\frac{3\sqrt{6}}{4}$ であるから

$$\frac{4}{3} \pi \left(\frac{3\sqrt{6}}{4} \right)^3 = \frac{27\sqrt{6}}{8} \pi$$

となる。よって

$$\frac{\frac{27\sqrt{6}}{8} \pi}{\frac{9\sqrt{2}}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \pi$$

より、球 S の体積は正四面体 ABCD の体積の $\frac{3\sqrt{3}}{2} \pi$ 倍である。

(4)

四面体 HABC において、 $\triangle HBC$ を底面とすると、高さは AH となる。 $\triangle HBC$ の面積は底辺を BH、高さを CE として

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

である。よって四面体 HABC の体積は

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{6} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

となる。四面体 HABC において、 $\triangle ABC$ を底面とすると、高さは H から $\triangle ABC$ に下した垂線の長さとなる。 $\triangle ABC$ の面積は (3) より $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ であるから、H から $\triangle ABC$ に下ろした垂線の長さを h とすると

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot \frac{9\sqrt{3}}{4} h &= \frac{3\sqrt{2}}{4} \\ \therefore h &= \frac{\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

となる。