

I

[解答]

(1)	ア	
	30	
(2)	イ	
	$\frac{8}{13}$	
(3)	ウ	
	67	
(4)	エ	オ
	$\sqrt{21}$	$\sqrt{7}$
(5)	カ	キ
	$\frac{1}{6}$	$-\frac{13}{12}$
(6)	ク	ケ
	63	10

[解説]

(1)

一万の位の数が、3, 4, 5 のいずれかで、一の位の数が2, 4 のいずれかであればよい。

[1] 一万の位の数が3 のとき

一の位の数が2, 4 のいずれかであり、その他の位の数はどの数を入れてもよいので、条件を満たす5桁の整数は、

$$2 \cdot 3! = 12 \text{ (通り)}$$

ある。

[2] 一万の位の数が4 のとき

一の位の数が4 であり、その他の位の数はどの数を入れてもよいので、条件を満たす整数は、

$$3! = 6 \text{ (通り)}$$

ある。

[3] 一万の位の数が5 のとき

一万の位の数が3 のときと同様に考えると、条件を満たす整数は

$$2 \cdot 3! = 12 \text{ (通り)}$$

ある。

以上[1], [2], [3]より、30000 以上の偶数は

$$12 + 6 + 12 = 30 \text{ (通り)}$$

ある。

(2)

$$1 < \sqrt{3} < 2 \text{ より,}$$

$$4 < 3 + \sqrt{3} < 5$$

である。よって、

$$a = 4$$

$$b = 3 + \sqrt{3} - 4 = \sqrt{3} - 1$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} \frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{a-b-1} &= \frac{1}{4+\sqrt{3}} + \frac{1}{4-\sqrt{3}} \\ &= \frac{(4-\sqrt{3})+(4+\sqrt{3})}{4^2-(\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{8}{13} \end{aligned}$$

である。

(3)

1 から 200 までの整数の中に 2 の倍数は、

$$200 = 2 \cdot 100$$

より、100 個ある。同様に、3 の倍数は、

$$200 = 3 \cdot 66 + 2$$

より、66 個ある。6 の倍数は、

$$200 = 6 \cdot 33 + 2$$

より、33 個ある。よって、1 から 100 までの整数で、2 の倍数でも 3 の倍数でもない数の個数は、

$$200 - (100 + 66) + 33 = 67 \text{ (個)}$$

である。

(4)

余弦定理より、

$$CA^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B$$

$$\Leftrightarrow CA^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cos 60^\circ$$

$$\therefore CA = \sqrt{21} \text{ (}\because CA > 0\text{)}$$

である。また、正弦定理より、 $\triangle ABC$ の外接円の半径を R とおくと、

$$\frac{AC}{\sin B} = 2R$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{21}}{\sin 60^\circ} = 2R$$

$$\therefore R = \sqrt{7}$$

である。

(5)

この放物線の方程式を、 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) とおく。3 点 $(0, -1)$, $(2, 9)$, $(-1, 3)$ を通るので、代入すると、

$$\begin{cases} -1 = c \\ 9 = 4a + 2b + c \\ 3 = a - b + c \end{cases}$$

の3元1次連立方程式を得る。これを解くと、

$$a = 3, b = -1, c = -1$$

となる。したがって、放物線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= 3x^2 - x - 1 \\ &= 3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{13}{12} \end{aligned}$$

であるので、頂点の座標は、 $\left(\frac{1}{6}, -\frac{13}{12}\right)$ である。

(6)

このデータを、得点の低い順に並べなおすと、

$$41, 50, 57, 58, 62, 64, 72, 77, 80, 92$$

であるから、中央値は、

$$\frac{62 + 64}{2} = 63$$

である。四分位偏差は、

$$\frac{77 - 57}{2} = 10$$

である。

[解答]

(1)	ア	イ
	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
(2)	ウ	
	$\frac{1}{6}$	
(3)	エ	オ
	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{15}$
(4)	カ	
	$\frac{7}{30}$	

[解説]

(1)

カードを1枚引き、AからAへと移動するには、4が書かれたカードを引けばよいので、この確率は $\frac{1}{5}$ である。また、カードを1枚引き、AからBへと移動するには、1または5が書かれたカードを引けばよいので、この確率は $\frac{2}{5}$ である。

(2)

サイコロを投げて、AからBへと移動するには、3の目を出せばよいので、(1)の結果を用いると、求める確率は、

$$\frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{1}{5}} = \frac{1}{6}$$

である。

(3)

(1)、(2)と同様に考えると、カードを1枚引き、AからAへと移動し、サイコロを投げて、AからBへと移動する確率は、

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$$

である。同様にして、カードを1枚引き、AからBへと移動し、サイコロを投げて、BからBへと移動する確率は、

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{15}$$

である。

(4)

カードを1枚引き、AからCへと移動し、サイコロを投げて、CからBへと移動する確率は、

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{15}$$

である。また、カードを1枚引き、AからDへと移動し、サイコロを投げて、DからBへと移動する確率は、

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{15}$$

である。(3)の結果を用いると、求める確率は、

$$\frac{1}{30} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} = \frac{7}{30}$$

である。

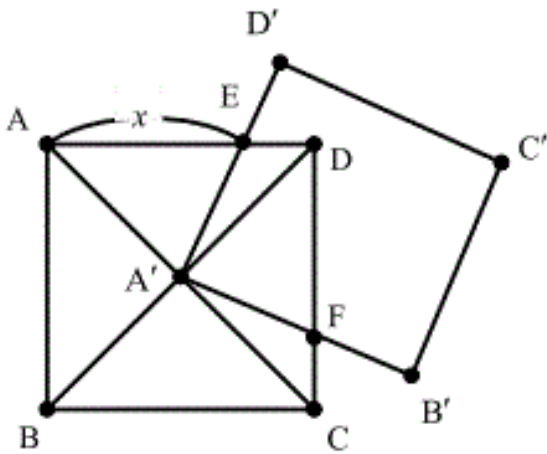
3

[解答]

(1)	ア	イ
	$\sqrt{x^2-2x+2}$	$2-\sqrt{x^2-2x+2}$
(2)	ウ	
	$14-2\sqrt{x^2-2x+2}$	
(3)	エ	オ
	1	12
(4)	カ	キ
	2	$14-2\sqrt{2}$
(5)	ク	
	1	

[解説]

(1)



△AA'Eについて、余弦定理より、

$$\begin{aligned}A'E^2 &= AE^2 + A'A^2 - 2 \cdot AE \cdot A'A \\ \Leftrightarrow A'E^2 &= x^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot x \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ \\ \Leftrightarrow A'E^2 &= x^2 - 2x + 2\end{aligned}$$

が成り立つ。

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 > 0 \\ A'E > 0 \end{cases}$$

であるから、

$$A'E = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned}AA' &= \sqrt{2} = DA' \\ \angle EAA' &= 45^\circ = \angle FDA' \\ \angle EA'A &= \angle DA'A - \angle DA'E \\ &= 90^\circ - \angle DA'E \\ &= \angle FA'E - \angle DA'E \\ &= \angle FA'D\end{aligned}$$

より、一辺両端角相等から、

$$\triangle AA'E \equiv \triangle DA'F$$

が成り立つ。従って、

$$A'F = A'E$$

より、

$$\begin{aligned}B'F &= 2 - A'F \\ &= 2 - A'E \\ &= 2 - \sqrt{x^2 - 2x + 2}\end{aligned}$$

である。

(2)

△AA'E≡△DA'Fを利用して、

$$\begin{aligned}CF &= CD - DF \\ &= CD - AE \\ &= 2 - x\end{aligned}$$

であり、また、

$$\begin{aligned}D'E &= D'A' - A'E \\ &= 2 - \sqrt{x^2 - 2x + 2}\end{aligned}$$

である。従って、

$$\begin{aligned}L &= AB + BC + CF + FB' + B'C' + C'D' + D'E + EA \\ &= 2 + 2 + (2 - x) + (2 - \sqrt{x^2 - 2x + 2}) + 2 + 2 + (2 - \sqrt{x^2 - 2x + 2}) + x \\ &= 14 - 2\sqrt{x^2 - 2x + 2}\end{aligned}$$

である。

(3)

点Eは辺AD上にあるが、点Dと点Fが一致するとき、点Eは点Aと一致するので、結局、点Eは線分ADから点Aを除いた範囲を動く。したがって、

$$0 < x \leq 2$$

である。ここで、

$$f(x) = x^2 - 2x + 2 \quad (0 < x \leq 2)$$

とすると、

$$L = 14 - 2\sqrt{f(x)}$$

であるから、Lが最大となるのは、f(x)が最小となるときである。

$$f(x) = (x-1)^2 + 1$$

であるから、f(x)はx=1で最小となり、その最小値はf(1)=1である。従って、Lが最大となるのは、x=1のときで、その最大値は、

$$\begin{aligned}L &= 14 - 2 \cdot 1 \\ &= 12\end{aligned}$$

である。

(4)

Lが最小となるのは、f(x)が最大となるときであり、f(x)はその定義域において、x=2で最大値f(2)=2をとる。したがって、Lが最小となるのは、x=2のときで、その最小値は、

$$L = 14 - 2\sqrt{2}$$

である。

(5)

四角形A'FDEの面積をSとすると、

$$S = \triangle A'FD + \triangle A'DE$$

であり、△AA'E≡△A'FDより、

$$S = \triangle AA'E + \triangle A'DE = \triangle AA'D$$

が成り立つ。したがって、求める面積は、

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \cdot AA' \cdot A'D \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \\ &= 1\end{aligned}$$

である。