

1

【解答】

ア	イ	ウ	
$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{5\sqrt{3}}{2}$	
エ	オ	カ	キ
$2\sqrt{e}(e-1)$	a	c	e

【解説】

(1)

$$\begin{aligned}\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} &= 1, \quad \theta \rightarrow 0 \text{ のとき } \frac{\theta}{2} \rightarrow 0 \text{ より,} \\ \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan \theta - \sin \theta}{\theta^3} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\cos \theta} \cdot \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\cos \theta} \cdot \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \frac{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\theta^2} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\cos \theta} \cdot \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \left(\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

を得る。

(2)

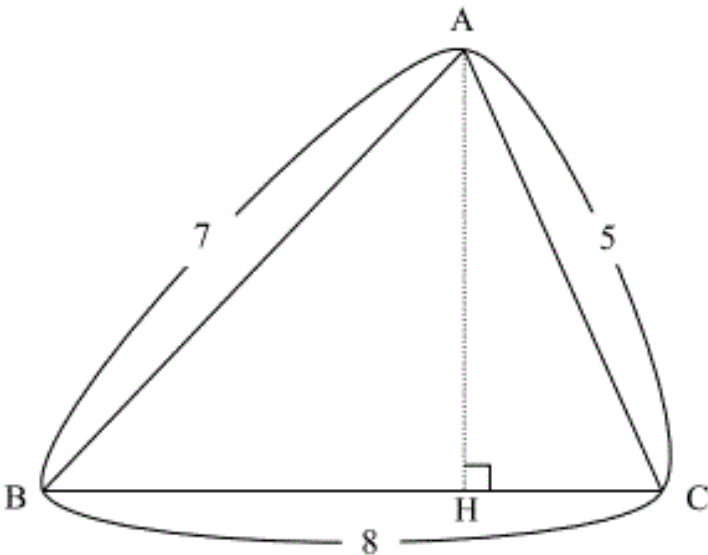
$$\begin{aligned}z + \frac{1}{z} &= \sqrt{3} \\ \Leftrightarrow z^2 - \sqrt{3}z + 1 &= 0 \\ \therefore z &= \frac{\sqrt{3} \pm i}{2}\end{aligned}$$

より、 $z = \cos\left(\pm\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)$ (複号同順) である。よって、

$$\begin{cases} z^{20} = \cos\left(\pm\frac{10}{3}\pi\right) + i\sin\left(\pm\frac{10}{3}\pi\right) \\ \frac{1}{z^{20}} = \cos\left(\mp\frac{10}{3}\pi\right) + i\sin\left(\mp\frac{10}{3}\pi\right) \\ \quad = \cos\left(\pm\frac{10}{3}\pi\right) - i\sin\left(\pm\frac{10}{3}\pi\right) \end{cases}$$

であるから、 $z^{20} + \frac{1}{z^{20}} = 2\cos\left(\pm\frac{10}{3}\pi\right) = -1$ を得る。

(3)



△ABCにおいて、余弦定理より

$$\begin{aligned}\cos B &= \frac{7^2 + 8^2 - 5^2}{2 \cdot 7 \cdot 8} \\ &= \frac{11}{14}\end{aligned}$$

であり、いま $0 < B < \pi$ より $\sin B > 0$ であるから、

$$\begin{aligned}\sin B &= \sqrt{1 - \left(\frac{11}{14}\right)^2} \\ &= \frac{5\sqrt{3}}{14}\end{aligned}$$

である。よって、 $AH = AB \sin B = 7 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{14} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ となる。

(4)

$F'(x) = \frac{x}{\log x}$ となる $F(x)$ を設定すると、

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{d}{dx} \left(\int_x^{x^2} \frac{t}{\log t} dt \right) \\ &= \frac{d}{dx} [F(t)]_x^{x^2} \\ &= \frac{d}{dx} \{F(x^2) - F(x)\} \\ &= F'(x^2) \cdot (x^2)' - F'(x) \cdot (x)' \\ &= \frac{x^2}{\log x^2} \cdot 2x - \frac{x}{\log x} \cdot 1 \\ &= \frac{x^3 - x}{\log x}\end{aligned}$$

となるから、 $f'(\sqrt{e}) = \frac{e\sqrt{e} - \sqrt{e}}{\log \sqrt{e}} = 2\sqrt{e}(e-1)$ を得る。

(5)

a：それぞれの最大値は平成27年では6を超えているのに対し、平成29年では6を超えていないため、この文章は正しい。

b：平成27年の値においてYは中央値より明らかに大きい方に偏っているため、この文章は誤りである。

c：散布図より最大値、最小値、四分位数を読み取ると箱ひげ図で最も適当なものはAであるため、この文章は正しい。

d：平成29年では最大値は6を超えていないため、この文章は誤りである。

e：Xは他の点の塊より外れた場所にあるため、この文章は正しい。

f：散布図より正の相関があると読み取れるため、この文章は誤りである。

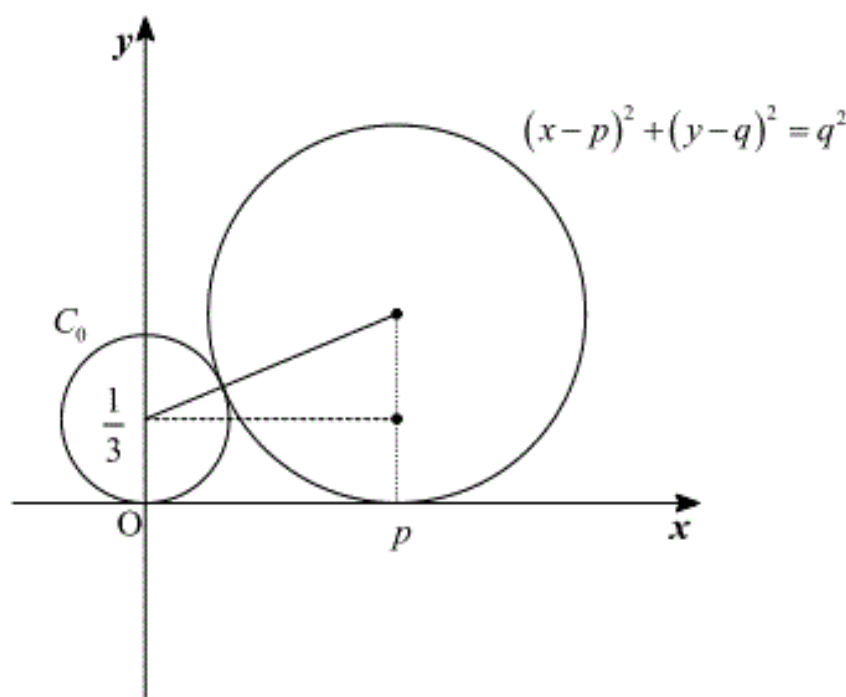
2

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ
$\frac{3}{4}p^2$	$\frac{3}{4}a_n^2$	$\frac{9}{4}$	$\frac{2a_n}{3a_n+2}$
オ	カ	キ	ク
$b_n + \frac{3}{2}$	$\frac{2}{3n-1}$	$\frac{9}{(3n-1)^4}\pi$	$\frac{\pi}{9}$

〔解説〕

(1)

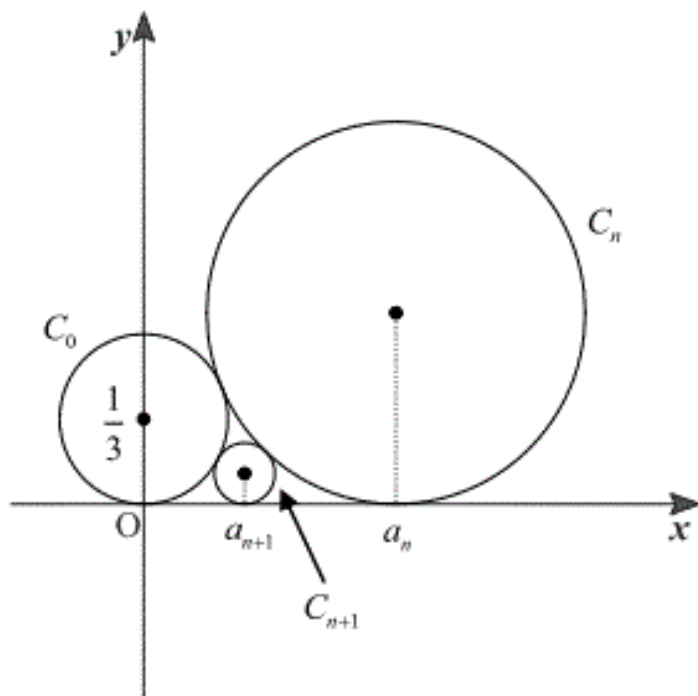


三平方の定理より,

$$\begin{aligned}
 p^2 + \left(q - \frac{1}{3}\right)^2 &= \left(q + \frac{1}{3}\right)^2 \\
 \Leftrightarrow p^2 + q^2 - \frac{2}{3}q + \frac{1}{9} &= q^2 + \frac{2}{3}q + \frac{1}{9} \\
 \Leftrightarrow p^2 &= \frac{4}{3}q \\
 \therefore q &= \frac{3}{4}p^2
 \end{aligned}$$

を得る。

(2)



C_n の半径を r_n とすると, C_n の中心の座標は (a_n, r_n) であるから, 前問より $r_n = \frac{3}{4}a_n^2$ の関係が
成り立つ。また, C_n と C_{n+1} が接するので, 前問と同様に三平方の定理より

$$\begin{aligned}
 (r_n + r_{n+1})^2 &= (r_n - r_{n+1})^2 + (a_n - a_{n+1})^2 \\
 \Leftrightarrow r_n^2 + 2r_n r_{n+1} + r_{n+1}^2 &= r_n^2 - 2r_n r_{n+1} + r_{n+1}^2 + (a_n - a_{n+1})^2 \\
 \Leftrightarrow (a_n - a_{n+1})^2 &= 4r_n r_{n+1} \\
 \Leftrightarrow (a_n - a_{n+1})^2 &= 4 \cdot \frac{3}{4}a_n^2 \cdot \frac{3}{4}a_{n+1}^2 \\
 \Leftrightarrow (a_n - a_{n+1})^2 &= \frac{9}{4}a_n^2 a_{n+1}^2
 \end{aligned}$$

となる。このとき, 上図より $a_n > a_{n+1} \Leftrightarrow a_n - a_{n+1} > 0$ であるから,

$$\begin{aligned}
 a_n - a_{n+1} &= \frac{3}{2}a_n a_{n+1} \\
 \Leftrightarrow a_{n+1} \left(\frac{3}{2}a_n + 1 \right) &= a_n \\
 \therefore a_{n+1} &= \frac{2a_n}{3a_n + 2} \left(\because \frac{3}{2}a_n + 1 > 0 \right)
 \end{aligned}$$

を得る。この逆数をとって

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{a_{n+1}} &= \frac{1}{a_n} + \frac{3}{2} \\
 \Leftrightarrow b_{n+1} &= b_n + \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

となるから, 数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = \frac{1}{a_1} = 1$, 公差 $\frac{3}{2}$ の等差数列となる。よって,

$$\begin{aligned}
 b_n &= b_1 + \frac{3}{2}(n-1) \\
 &= \frac{3n-1}{2}
 \end{aligned}$$

であるから, $a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{2}{3n-1}$ を得る。

(3)

$$r_n = \frac{3}{4}a_n^2 = \frac{3}{(3n-1)^2} \text{ であるから,}$$

$$\begin{aligned}
 S_n &= \pi r_n^2 \\
 &= \frac{9}{(3n-1)^4} \pi
 \end{aligned}$$

となる。よって,

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} n^4 S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} 9\pi \cdot \left(\frac{n}{3n-1} \right)^4 \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} 9\pi \cdot \left(\frac{1}{3 - \frac{1}{n}} \right)^4 \\
 &= 9\pi \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^4 \\
 &= \frac{\pi}{9}
 \end{aligned}$$

である。

【解答】

ア	イ	ウ	エ	オ
3	-1	0	$a > 1$	$a = 1$
カ	キ	ク	ケ	コ
$0 < a < 1$	$-2 - \sqrt{3}$	$-2 + \sqrt{3}$	1	$6\sqrt{3} - 3$

【解説】

(1)

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3x & (x \geq 0) \\ -x^2 - 3x & (x < 0) \end{cases}$$

である。よって $x \geq 0$ のとき、

$$\begin{aligned} -x^2 + 3x &= 0 \\ \Leftrightarrow -x(x-3) &= 0 \\ \therefore x &= 0, 3 \end{aligned}$$

を得る。また、 $x < 0$ のとき、

$$\begin{aligned} -x^2 - 3x &= 0 \\ \Leftrightarrow -x(x+3) &= 0 \\ \therefore x &= -3 \end{aligned}$$

を得る。ゆえに、 C_1 と x 軸の交点は全部で3個である。

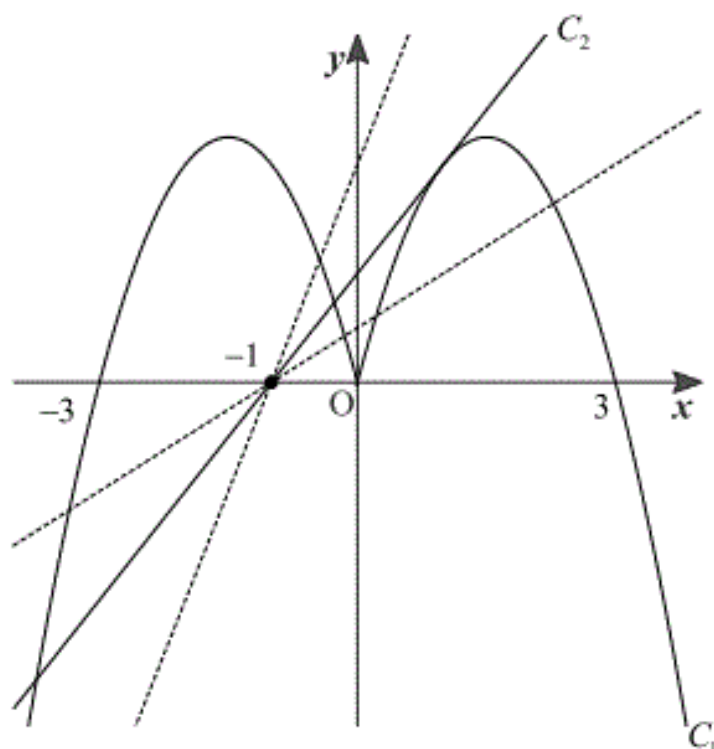
(2)

 $y = a(x+1)$ が a の値に関わらずこの等式を満たすのは、

$$\begin{cases} y = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases}$$

のときであるから、これを解いて $x = -1, y = 0$ である。よって、 C_2 は必ず点 $(-1, 0)$ を通る。

(3)

 $y = g(x)$ が $0 \leq x \leq 3$ で $y = -x^2 + 3x$ と接するときの条件を考える。直線の式と放物線の式を連立すると、

$$\begin{aligned} a(x+1) &= -x^2 + 3x \\ \Leftrightarrow x^2 - (3-a)x + a &= 0 \end{aligned}$$

となる。接するとき、この方程式が重解をもつので、この方程式の判別式を D として、

$$\begin{aligned} D &= 0 \\ \Leftrightarrow (3-a)^2 - 4a &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 10a + 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a-1)(a-9) &= 0 \\ \therefore a &= 1, 9 \end{aligned}$$

を得る。 $a = 1$ のとき、接点の x 座標は

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)^2 &= 0 \\ \therefore x &= 1 \end{aligned}$$

であり、これは $0 \leq x \leq 3$ を満たす。一方 $a = 9$ のとき、接点の x 座標は

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+3)^2 &= 0 \\ \therefore x &= -3 \end{aligned}$$

であり、これは $0 \leq x \leq 3$ を満たさず不適である。よって、 C_1 と C_2 の共有点の個数は

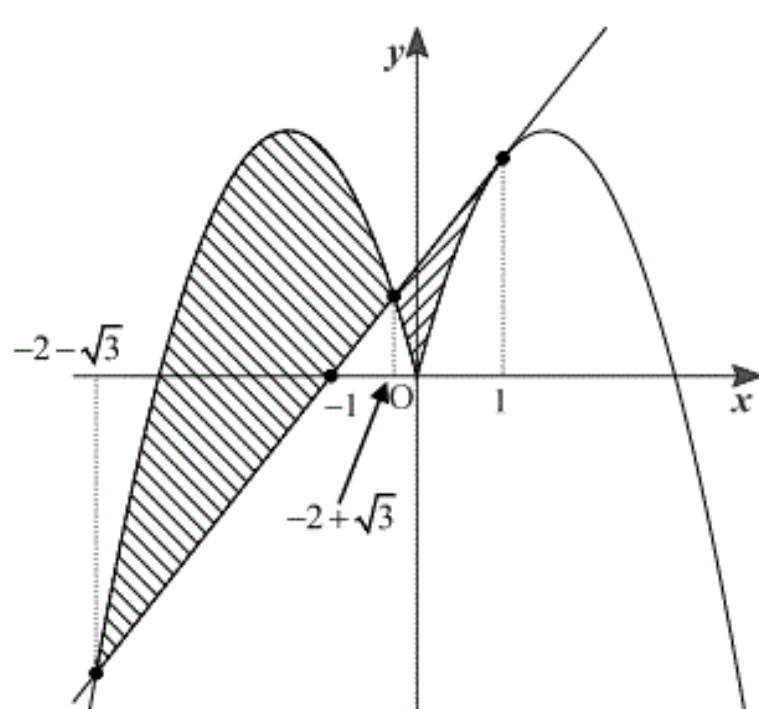
$$\begin{cases} a > 1 \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ a = 1 \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \\ 0 < a < 1 \text{ のとき} & 4 \text{ 個} \end{cases}$$

である。

(4)

 $a = 1$ のとき、

$$\begin{aligned} -x^2 - 3x &= x + 1 \\ \Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 &= 0 \\ \therefore x &= -2 \pm \sqrt{3} \\ -x^2 + 3x &= x + 1 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)^2 &= 0 \\ \therefore x &= 1 \end{aligned}$$

より、 C_1 と C_2 の共有点の x 座標は $x = -2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}, 1$ である。求める面積は上図の斜線部分であり、これを S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2-\sqrt{3}}^{-2+\sqrt{3}} \{(-x^2 - 3x) - (x+1)\} dx + \int_{-2+\sqrt{3}}^0 \{(x+1) - (-x^2 - 3x)\} dx + \int_0^1 \{(x+1) - (-x^2 + 3x)\} dx \\ &= \int_{-2-\sqrt{3}}^{-2+\sqrt{3}} -(x^2 + 4x + 1) dx + \int_{-2+\sqrt{3}}^0 (x^2 + 4x + 1) dx + \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) dx \\ &= \int_{-2-\sqrt{3}}^{-2+\sqrt{3}} -\{x - (-2 + \sqrt{3})\} \{x - (-2 - \sqrt{3})\} dx + \int_{-2+\sqrt{3}}^0 (x^2 + 4x + 1) dx + \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) dx \\ &= \frac{1}{6} \{(-2 + \sqrt{3}) - (-2 - \sqrt{3})\}^3 + \left[\frac{1}{3} x^3 + 2x^2 + x \right]_{-2+\sqrt{3}}^0 + \left[\frac{1}{3} x^3 - x^2 + x \right]_0^1 \\ &= 4\sqrt{3} - \frac{10}{3} + 2\sqrt{3} + \frac{1}{3} \\ &= 6\sqrt{3} - 3 \end{aligned}$$

を得る。