

〔解答〕

ア			イ	
$(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$			$\frac{6}{5} \leq x < 2$	
ウ	エ	オ	カ	キ
92	32	17	-3	4

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}x^4-y^4 &= (x^2)^2-(y^2)^2 \text{ より,} \\&= (x^2-y^2)(x^2+y^2) \\&= (x-y)(x+y)(x^2+y^2)\end{aligned}$$

となる。

(2)

不等式をそれぞれ変形すると、

$$\begin{aligned}2x+3 &> 4x-1 \\ \Leftrightarrow 4 &> 2x \\ \therefore 2 &> x \\ -2x+5 &\leq 3x-1 \\ \Leftrightarrow 6 &\leq 5x \\ \therefore \frac{6}{5} &\leq x\end{aligned}$$

となる。以上から、

$$\frac{6}{5} \leq x < 2$$

となる。

(3)

二項定理より、

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{7})^4 &= \sum_{k=0}^4 {}_4C_k (\sqrt{7})^k \\&= (\sqrt{7})^4 + 4(\sqrt{7})^3 + 6(\sqrt{7})^2 + 4\sqrt{7} + 1 \\&= 92 + 32\sqrt{7}\end{aligned}$$

となる。

(4)

ユークリッドの互除法を用いて、

$$\begin{aligned}1547 &= 391 \cdot 3 + 374 \\ 391 &= 374 + 17 \\ 374 &= 17 \cdot 22\end{aligned}$$

であるため、1547 と 374 の最大公約数は17である。

(5)

集合 A に9が含まれるので、

$$\begin{aligned}a^2 &= 9 \\ \therefore a &= \pm 3\end{aligned}$$

が必要である。

[1] $a=3$ のとき

$$\begin{aligned}B &= \{8, 9, 2, 3+b\} \\&\text{となる。このとき、} A \cap B \text{ に} 2 \text{ が含まれるため、不適。}\end{aligned}$$

[2] $a=-3$ のとき

$$\begin{aligned}B &= \{8, 9, -4, -3+b\} \\&\text{となる。} A \cap B = \{1, 9\} \text{ であるから,} \\-3+b &= 1 \\ \therefore b &= 4\end{aligned}$$

となる。これで十分である。

[1], [2]より、 $a=-3, b=4$ となる。

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ
$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{4}$
オ	カ	キ	
$\frac{2^k-1}{6^k}$	$\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}$	$\frac{5(2^k-2)}{6^k}$	

〔解説〕

(1)

出た目の最大値が1のとき、2個のさいころの目がどちらも1であるので、出た目の最大値が1となる確率は、

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

となる。また、最大値が2のとき、2個のさいころの目が1と2または、2のみであるので、出た目の最大値が2となる確率は、

$$2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

となる。余事象を考えると、出た目の最小値が1となる確率は、

$$1 - (1 \text{ がでない確率})$$

となる。1が出ない確率を求めると、

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$$

である。以上から、出た目の最小値が1となる確率は、

$$1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$$

となる。また、出た目の最小値が2となる確率は、

$$(2 \text{ つのさいころの目がどちらも2以上である確率}) - (2 \text{ つのさいころの目がどちらも3以上である確率})$$

となる。2つのさいころの目がどちらも2以上である確率は、

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$$

である。2つのさいころの目がどちらも3以上である確率は、

$$\frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{4}{9}$$

である。以上から、出た目の最小値が2となる確率は、

$$\frac{25}{36} - \frac{4}{9} = \frac{1}{4}$$

となる。

(2)

$M=2$ となる確率は、

$$(k \text{ 個のさいころの目が1または2である確率}) - (k \text{ 個のさいころの目が1のみである確率})$$

である。以上から、 $M=2$ となる確率は、

$$\left(\frac{2}{6}\right)^k - \left(\frac{1}{6}\right)^k = \frac{2^k-1}{6^k}$$

となる。また、 $M=m$ となるのは、 k 個のさいころの目がすべて等しいときである。さいころの目の出方は1から6の6通りであるから、 $M=m$ となる確率は、

$$\left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot 6 = \left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}$$

となる。 $M-m=1$ となるときについて、例えば、 $M=3, m=2$ となる確率を求める。この確率は、

$$(k \text{ 個のさいころの目が3または2である確率}) - (k \text{ 個のさいころの目が3のみである確率}) - (k \text{ 個のさいころの目が2のみである確率})$$

であるから、

$$\left(\frac{2}{6}\right)^k - \left(\frac{1}{6}\right)^k - \left(\frac{1}{6}\right)^k = \frac{2^k-2}{6^k}$$

となる。 M と m の組み合わせとしては、 $(M, m) = (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5)$ の5通りあるから、同様にして考えると、 $M-m=1$ となる確率は、

$$\frac{5(2^k-2)}{6^k}$$

となる。

