

〔解答〕

ア		イ		ウ	
$2-\sqrt{3}$		$2+\sqrt{3}$		$1-\sqrt{3}<x<1+\sqrt{3}$	
エ	オ	カ	キ	ク	
120	12	465	6	15	

〔解説〕

(1)

長方形の辺の長さをそれぞれ、 $a, b (0 < a \leq b)$ とすると、辺の縦と横の長さの和が4であることから、

$$a+b=4$$

であり、長方形の面積が1であることから、

$$ab=1$$

となる。したがって、解と係数の関係から a, b は、 x についての2次方程式

$$x^2-4x+1=0$$

の解となる。この方程式を解くと $x=2\pm\sqrt{3}$ となるから、 $a\leq b$ より、

$$a=2-\sqrt{3}, b=2+\sqrt{3}$$

である。

(2)

$$x^2-2x-2<0$$

$$\Leftrightarrow \{x-(1-\sqrt{3})\}\{x-(1+\sqrt{3})\}<0$$

$$\Leftrightarrow 1-\sqrt{3}<x<1+\sqrt{3}$$

である。

(3)

$\triangle ABC$ において余弦定理より

$$\begin{aligned}\cos C &= \frac{BC^2+CA^2-AB^2}{2\cdot BC\cdot CA} \\ &= \frac{5^2+3^2-7^2}{2\cdot 5\cdot 3} \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

である。よって、 $0^\circ < C < 180^\circ$ より $C=120^\circ$ である。

(4)

$200=2^3\cdot 5^2$ より 200 の正の約数の個数は $(1+3)\cdot(1+2)=12$ (個) であり、それらの和は

$$\begin{aligned}(1+2^1+2^2+2^3)\cdot(1+5^1+5^2) &= 15\cdot 31 \\ &= 465\end{aligned}$$

である。

(5)

4つの値からなるデータ $10, 1, a, b$ を考える。このデータの平均値は8であることから、

$$\begin{aligned}\frac{10+1+a+b}{4} &= 8 \\ \Leftrightarrow a+b &= 21\end{aligned}$$

を得る。いま $a < b$ より

$$\begin{aligned}a+b &< 2b \\ \Leftrightarrow 21 &< 2b \\ \therefore b &> \frac{21}{2}\end{aligned}$$

であるから、このデータの最大値は b である。

[1] $a \leq 1$ のとき

$$\text{中央値は } \frac{1+10}{2} = \frac{11}{2} \text{ となり不適である。}$$

[2] $a > 1$ のとき

$$\text{中央値は } \frac{a+10}{2} \text{ となるから, } \frac{a+10}{2} = 8 \Leftrightarrow a = 6 \text{ を得る。}$$

以上[1], [2]より $a=6$ であるから、 $b=15$ となる。

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ
3	4	$\frac{24}{5}$	$\frac{7}{5}$
オ	カ	キ	
$\frac{21}{20}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{147}{200}$	

〔解説〕

(1)

$\triangle ABC$ は二等辺三角形であるから、頂角 A の二等分線は底辺 BC と垂直であり、その交点は辺 BC の中点となる。よって、 $BM = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$ であり、 $\triangle ABM$ において三平方の定理より、

$$AM = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

を得る。

(2)

$\triangle ABC$ の面積を 2 通りで表すことで、

$$\frac{1}{2} BC \cdot AM = \frac{1}{2} AC \cdot BH$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot BH$$

$$\Leftrightarrow BH = \frac{24}{5}$$

を得る。また、 $\triangle ABH$ において三平方の定理より、

$$AH = \sqrt{5^2 - \left(\frac{24}{5}\right)^2} = \frac{7}{5}$$

である。次に、方べきの定理より

$$AH \cdot CH = BH \cdot DH$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{5} \cdot \left(5 - \frac{7}{5}\right) = \frac{24}{5} \cdot DH$$

$$\therefore DH = \frac{21}{20}$$

である。

(3)

$\angle BAM = \angle NAH$, $\angle AMB = \angle AHN = 90^\circ$ より、

$$\triangle ABM \sim \triangle ANH$$

であるから、

$$AB : AM = AN : AH$$

$$\therefore AN = \frac{AB \cdot AH}{AM} = \frac{5 \cdot \frac{7}{5}}{4} = \frac{7}{4}$$

と求められる。また、 $\triangle ABM$ の面積は、

$$\frac{1}{2} BM \cdot AM = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$$

と求められるから、 $\triangle ANH$ の面積は、

$$\frac{AN^2}{AB^2} \cdot 6 = \frac{\left(\frac{7}{4}\right)^2}{5^2} \cdot 6 = \frac{147}{200}$$

となる。

【解答】

ア	イ	ウ	エ
$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{54}{625}$	$\frac{78}{625}$
オ	カ	キ	
$\frac{36}{125}$	$\frac{648}{3125}$	$\frac{2133}{3125}$	

【解説】

(1)

2ゲーム目でXが優勝する確率は $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$ である。2ゲーム目で優勝が決まらない確率は

$X \rightarrow Y$ または $Y \rightarrow X$ の順で勝つ確率であるから、

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{25}$$

となる。また、4ゲーム目でXが優勝するには $X \rightarrow Y \rightarrow X \rightarrow X$ の順で勝たなければならない

から、この確率は $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{54}{625}$ である。同様に4ゲーム目でYが優勝するには

$Y \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Y$ の順で勝たなければならないから、この確率は $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{24}{625}$ である。よ

って、4ゲーム目で優勝チームが決まる確率は

$$\frac{54}{625} + \frac{24}{625} = \frac{78}{625}$$

となる。

(2)

2ゲーム目まででXとYが1回ずつ勝ったのち、3ゲーム目でXが勝たなければならないから、3ゲーム目でXが優勝する確率は

$${}_2C_1 \left(\frac{3}{5} \right)^1 \left(\frac{2}{5} \right)^1 \cdot \frac{3}{5} = \frac{36}{125}$$

である。

(3)

5ゲーム目でXが優勝するには、4ゲーム目まででXとYが2回ずつ勝ったのち、5ゲーム目でXが勝たなければならないから、この確率は

$${}_4C_2 \left(\frac{3}{5} \right)^2 \left(\frac{2}{5} \right)^2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{648}{3125}$$

である。また、Xが優勝する確率は以下の3つに分けられる。

[1] 5ゲーム目でXが優勝する確率

前述の通り、 $\frac{648}{3125}$ である。

[2] 4ゲーム目でXが優勝する確率

3ゲーム目まででXが2回、Yが1回勝ったのち、4ゲーム目でXが勝つ確率であるから、

$${}_3C_2 \left(\frac{3}{5} \right)^2 \left(\frac{2}{5} \right)^1 \cdot \frac{3}{5} = \frac{162}{625}$$

である。

[3] 3ゲーム目でXが優勝する確率

Xが3連勝する確率であるから、 $\left(\frac{3}{5} \right)^3 = \frac{27}{125}$ である。

以上[1]~[3]より、Xが優勝する確率は

$$\begin{aligned} \frac{648}{3125} + \frac{162}{625} + \frac{27}{125} &= \frac{648 + 810 + 675}{3125} \\ &= \frac{2133}{3125} \end{aligned}$$

となる。