

【解答】

(1)	1	2	3			
	3	1	2			
(2)	4	5				
	3	2				
(3)	6	7				
	4	5				
(4)	8	9	10	11	12	13
	1	7	2	0	3	7
(5)	14	15	16	17		
	1	0	5	2		

【解説】

(1) $y = ax^2 - 12x + b$ が x 軸に接するとき、 $ax^2 - 12x + b = 0$ の判別式を D として

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow 6^2 - ab &= 0 \\ \therefore b &= \frac{36}{a} \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

である。このとき、 A の x 座標は

$$\begin{aligned} ax^2 - 12x + \frac{36}{a} &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2x^2 - 12ax + 36 &= 0 \\ \Leftrightarrow (ax - 6)^2 &= 0 \\ \therefore x &= \frac{6}{a} \end{aligned}$$

となる。よって、 $A\left(\frac{6}{a}, 0\right)$, $B(0, b)$ であるから

$$\begin{aligned} \triangle OAB &= 12 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{a} \cdot b &= 12 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{a} \cdot \frac{36}{a} &= 12 \\ \Leftrightarrow a^2 &= 9 \\ \therefore a &= 3 \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

を得る。このとき、 $b = \frac{36}{3} = 12$ である。

(2)

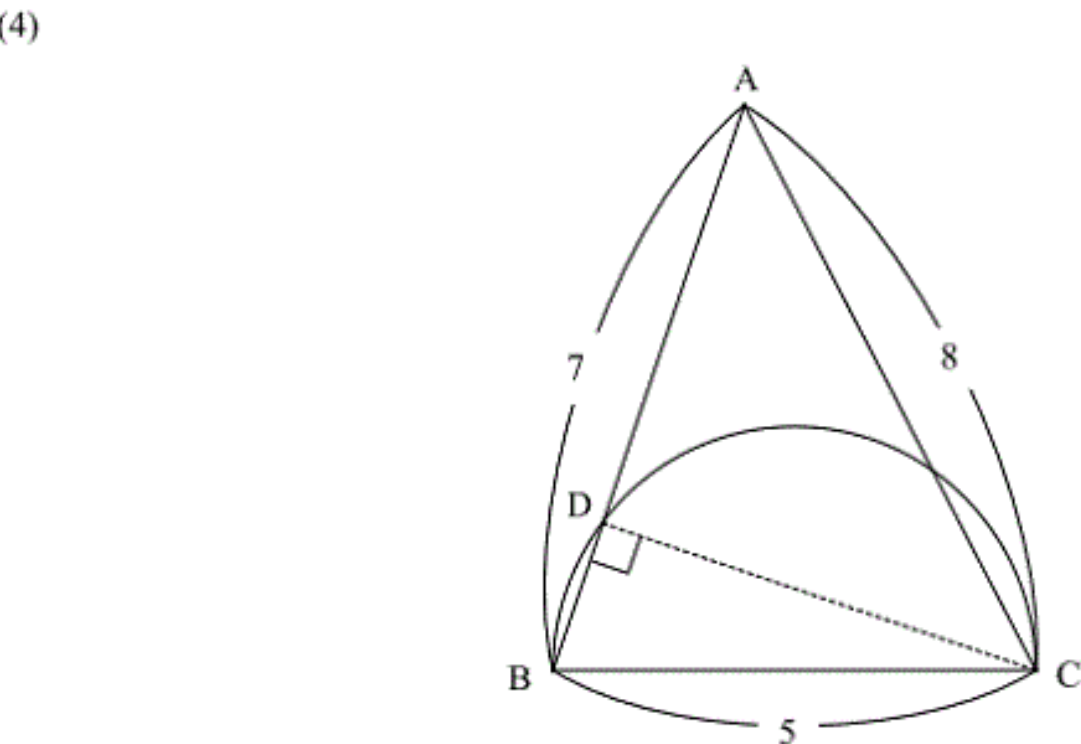
$$\begin{aligned} 3 \cdot 2^{2x} - 28 \cdot 2^x + 32 &= 0 \\ \Leftrightarrow 3 \cdot (2^x)^2 - 28 \cdot 2^x + 32 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2^x - 8)(3 \cdot 2^x - 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2^x &= 8, \frac{4}{3} \\ \therefore x &= 3, 2 - \log_2 3 \end{aligned}$$

である。

(3) サイコロの目の出方はどれも同様に確からしい。2つのさいころを同時に投げたとき、「出た目の和が9以上である」事象を A 、「2つのさいころの目がともに4以上である」事象を B とする。2つのさいころの目とその和を示すと以下の表のようになる。

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

上表において、事象 A は太線で分けられる部分の右下、事象 $A \cap B$ は網かけの部分となる。よって、 $P(A) = \frac{10}{36}$, $P(A \cap B) = \frac{8}{36}$ であるから、求める確率は $\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{8}{36}}{\frac{10}{36}} = \frac{4}{5}$ である。



$\triangle ABC$ において余弦定理より、

$$\begin{aligned} \cos \angle ABC &= \frac{7^2 + 5^2 - 8^2}{2 \cdot 7 \cdot 5} \\ &= \frac{1}{7} \end{aligned}$$

である。いま、 $0^\circ < \angle ABC < 180^\circ$ より $\sin \angle ABC > 0$ であるから、

$$\begin{aligned} \sin \angle ABC &= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{7}\right)^2} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{7} \end{aligned}$$

となる。よって、 $DC = 5 \cdot \sin \angle ABC = \frac{20\sqrt{3}}{7}$ を得る。

(5) データの平均値は $\frac{7+8+10+12+13}{5} = 10$ であるから、分散は

$$\begin{aligned} &\frac{1}{5} \left\{ (10-7)^2 + (10-8)^2 + (10-10)^2 + (10-12)^2 + (10-13)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{5} (9+4+0+4+9) \\ &= 5.2 \end{aligned}$$

となる。

【解答】

(1)	18	19	20	21	22	23				
	1	2	4	3	5	2				
(2)	24	25	26	27	28	29	30	31	32	
	2	1	2	1	1	2	5	3	8	
(3)	33	34	35							
	5	1	2							

【解説】

(1)

$\tan \alpha$ は $y = \frac{1}{2}x$ の傾きであるから、 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ となる。よって、

$$\begin{aligned}\tan 2\alpha &= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \\ &= \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} &= \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \\ \Leftrightarrow 4 \tan \frac{\alpha}{2} &= 1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2} \\ \Leftrightarrow \tan^2 \frac{\alpha}{2} + 4 \tan \frac{\alpha}{2} - 1 &= 0 \\ \therefore \tan \frac{\alpha}{2} &= -2 \pm \sqrt{5}\end{aligned}$$

を得るが、いま $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}$ より $\tan \frac{\alpha}{2} > 0$ であるから、 $\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{5} - 2$ となる。

(2)

$\tan(\alpha + \beta)$ は $y = ax$ の傾きであるから、 $\tan(\alpha + \beta) = a$ より、

$$\begin{aligned}\tan \beta &= \tan\{(\alpha + \beta) - \alpha\} \\ &= \frac{\tan(\alpha + \beta) - \tan \alpha}{1 + \tan(\alpha + \beta) \tan \alpha} \\ &= \frac{a - \frac{1}{2}}{1 + a \cdot \frac{1}{2}} \\ &= \frac{2a - 1}{a + 2}\end{aligned}$$

であるから、 $\beta = 2\alpha$ のとき

$$\begin{aligned}\tan \beta &= \tan 2\alpha \\ \Leftrightarrow \frac{2a - 1}{a + 2} &= \frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow 6a - 3 &= 4a + 8 \\ \Leftrightarrow 2a &= 11 \\ \therefore a &= \frac{11}{2}\end{aligned}$$

である。また、 $OC = 2OA$ のとき、 $\triangle OAC$ に三平方を用いて、 $AC = \sqrt{(2OA)^2 - OA^2} = \sqrt{3}OA$ より

$$\begin{aligned}\tan(\alpha + \beta) &= \frac{AC}{OA} \\ \Leftrightarrow a &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned}\tan \beta &= \frac{2\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 2} \\ &= (2\sqrt{3} - 1)(2 - \sqrt{3}) \\ &= 5\sqrt{3} - 8\end{aligned}$$

である。

(3)

点 B' が y 軸上にあるとき、 $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$ より

$$\begin{aligned}\tan \beta &= \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \\ &= \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\alpha}{2}} \\ &= \frac{1 - (\sqrt{5} - 2)}{1 + 1 \cdot (\sqrt{5} - 2)} \\ &= \frac{3 - \sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1} \\ &= \frac{(3 - \sqrt{5})(\sqrt{5} + 1)}{4} \\ &= \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\end{aligned}$$

を得る。

【解答】

(1)	36	37	38	39						
	8	2	7	2						
(2)	40	41	42	43	44	45	46			
	2	7	3	2	5	3	8			
(3)	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56
	1	4	1	4	1	4	1	3	8	4

【解説】

(1)

$\triangle OAB$ は正三角形であるから、 $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$ であり、

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle AOB \\ &= 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 8\end{aligned}$$

である。また、 $\triangle OAC$ において余弦定理より

$$\begin{aligned}AC^2 &= OA^2 + OC^2 - 2 \cdot OA \cdot OC \cdot \cos \angle AOC \\ \Leftrightarrow 25 &= 16 + 36 - 2\vec{a} \cdot \vec{c} \\ \therefore \vec{a} \cdot \vec{c} &= \frac{27}{2}\end{aligned}$$

を得る。

(2)

$\triangle OBC$ において余弦定理より

$$\begin{aligned}BC^2 &= OB^2 + OC^2 - 2 \cdot OB \cdot OC \cdot \cos \angle BOC \\ \Leftrightarrow 25 &= 16 + 36 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} \\ \therefore \vec{b} \cdot \vec{c} &= \frac{27}{2}\end{aligned}$$

を得る。いま D は辺 OB 上の点より $\overrightarrow{OD} = k\vec{b}$ (k は $0 \leq k \leq 1$ をみたす実数) とできるから、
 $\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{OD} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{OD} = 0$ より

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{OD} &= 0 \\ \Leftrightarrow (k\vec{b} - \vec{c}) \cdot k\vec{b} &= 0 \\ \Leftrightarrow k|\vec{b}|^2 - \vec{b} \cdot \vec{c} &= 0 \quad (\because k \neq 0) \\ \Leftrightarrow 16k - \frac{27}{2} &= 0 \\ \therefore k &= \frac{27}{32}\end{aligned}$$

である。よって $\overrightarrow{OD} = \frac{27}{32}\vec{b}$ より $OD:DB = 27:5$ であるから、

$$\begin{aligned}\triangle ADB &= \triangle OAB \cdot \frac{5}{32} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{5}{32} \\ &= \frac{5\sqrt{3}}{8}\end{aligned}$$

となる。

(3)

$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}\vec{a}$, $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$ である。F は直線 OG 上の点より、実数 l を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OF} &= l\overrightarrow{OG} \\ &= \frac{1}{3}l\vec{a} + \frac{1}{3}l\vec{b} + \frac{1}{3}l\vec{c}\end{aligned}$$

とできる。また、F は平面 EBC 上の点より、実数 s, t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OF} &= s\overrightarrow{OE} + t\overrightarrow{OB} + (1-s-t)\overrightarrow{OC} \\ &= \frac{1}{2}s\vec{a} + t\vec{b} + (1-s-t)\vec{c}\end{aligned}$$

とできる。よって、 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は 1 次独立であるから

$$\begin{cases} \frac{1}{3}l = \frac{1}{2}s \\ \frac{1}{3}l = t \\ \frac{1}{3}l = 1-s-t \end{cases}$$

を得る。これを解くと、 $l = \frac{3}{4}, s = \frac{1}{2}, t = \frac{1}{4}$ より $\overrightarrow{OF} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$ である。ここで、

$$\begin{aligned}|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{c} \cdot \vec{a} \\ &= 16 + 16 + 36 + 16 + 27 + 27 \\ &= 138 \\ \therefore |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| &= \sqrt{138}\end{aligned}$$

であるから、 $|\overrightarrow{OF}| = \frac{1}{4}|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ より $|\overrightarrow{OF}| = \frac{\sqrt{138}}{4}$ を得る。

【解答】

(1)	57	58	59	60	61					
	3	3	2	9	2					
(2)	62	63								
	6	2								
(3)	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73
	3	2	7	4	3	2	7	4	0	0
	74	75	76	77	78	79	80			
	3	2	2	7	8	9	2			
(4)	81	82	83	84	85					
	2	7	6	4	4					

【解説】

(1)

$f(x)=x^3-3x$ とすると、 $f'(x)=3x^2-3$ である。 C 上の点 (t,t^3-3t) における接線の方程式は

$$y-(t^3-3t)=(3t^2-3)(x-t)$$

$$\Leftrightarrow y=(3t^2-3)x-2t^3 \qquad \cdots \textcircled{1}$$

である。また、 C と x 軸の交点の x 座標は

$$x^3-3x=0$$

$$\Leftrightarrow x(x^2-3)=0$$

$$\Leftrightarrow x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})=0$$

$$\therefore x=0,\pm\sqrt{3}$$

となるから、 C と x 軸とによって囲まれる部分の面積の総和を S とすると

$$S=\int_{-\sqrt{3}}^0(x^3-3x)dx+\int_0^{\sqrt{3}}-(x^3-3x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2\right]_{-\sqrt{3}}^0+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{9}{4}+\frac{9}{4}$$

$$=\frac{9}{2}$$

を得る。

(2)

①が $(2,k)$ を通るとき、

$$k=(3t^2-3)\cdot 2-2t^3$$

$$\Leftrightarrow k=-2t^3+6t^2-6$$

となる。よって、点 $(2,k)$ を通る C の接線が2本以上存在するとき、

$$\begin{cases} u=-2t^3+6t^2-6 \\ u=k \end{cases}$$

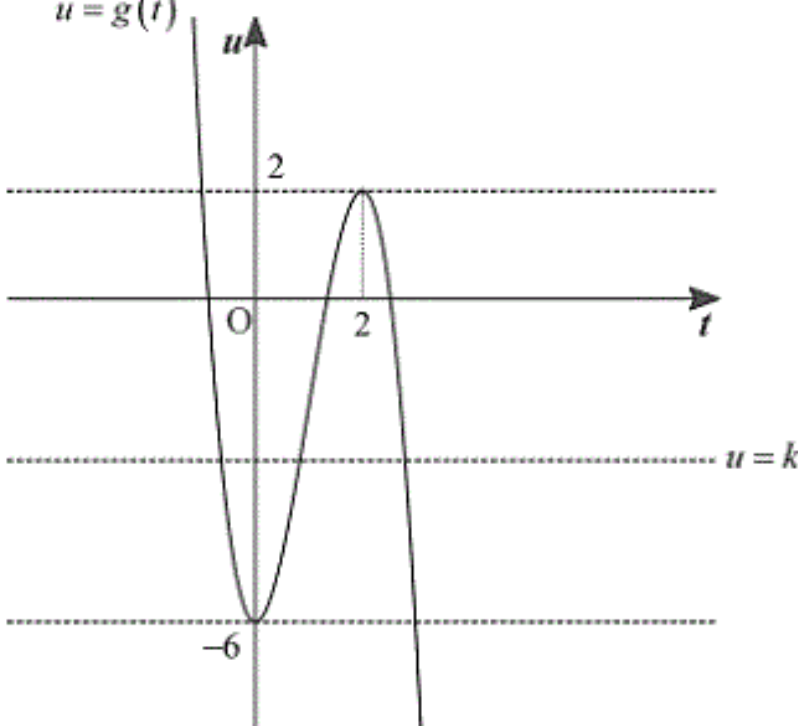
の共有点の個数が2個以上存在する。 $g(t)=-2t^3+6t^2-6$ とおくと

$$g'(t)=-6t^2+12t$$

$$=-6t(t-2)$$

より $g'(t)=0$ とすれば $t=0,2$ である。これより $g(t)$ の増減表、グラフは以下のようになる。

t	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	$\searrow$	-6	$\nearrow$	2	$\searrow$



上図より、条件を満たす k の範囲は $-6\leq k\leq 2$ である。

(3)

①が $(a,-3a)$ を通るとき、

$$-3a=(3t^2-3)a-2t^3$$

$$\Leftrightarrow 2t^3-3at^2=0$$

$$\Leftrightarrow t^2(2t-3a)=0$$

$$\therefore t=0,\frac{3}{2}a$$

より、このときの接線は

$$y=-3x, y=\left(\frac{27}{4}a^2-3\right)x-\frac{27}{4}a^3$$

であり、接点はそれぞれ $(0,0),\left(\frac{3}{2}a,\frac{27}{8}a^3-\frac{9}{2}a\right)$ である。

(4)

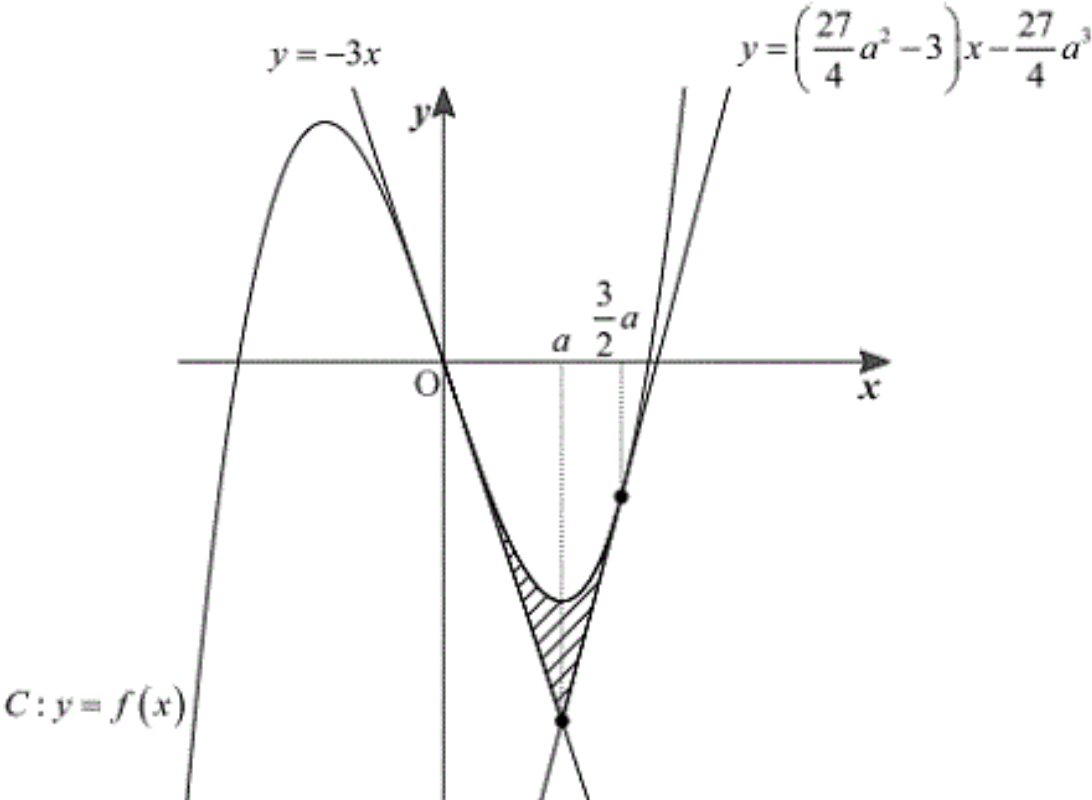
$y=-3x$ と $y=\left(\frac{27}{4}a^2-3\right)x-\frac{27}{4}a^3$ の交点の x 座標は

$$-3x=\left(\frac{27}{4}a^2-3\right)x-\frac{27}{4}a^3$$

$$\Leftrightarrow \frac{27}{4}a^2(x-a)=0$$

$$\therefore x=a\left(\because a>0\right)$$

である。



求める面積は上図の斜線部分の面積であるから、これを T とすると、

$$T=\int_0^a\left\{\left(x^3-3x\right)-(-3x)\right\}dx+\int_a^{\frac{3}{2}a}\left[\left(x^3-3x\right)-\left\{\left(\frac{27}{4}a^2-3\right)x-\frac{27}{4}a^3\right\}\right]dx$$

$$=\int_0^ax^3dx+\int_a^{\frac{3}{2}a}\left(x^3-\frac{27}{4}a^2x+\frac{27}{4}a^3\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^a+\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{27}{8}a^2x^2+\frac{27}{4}a^3x\right]_a^{\frac{3}{2}a}$$

$$=\frac{1}{4}a^4+\frac{243}{64}a^4-\frac{29}{8}a^4$$

$$=\frac{27}{64}a^4$$

である。