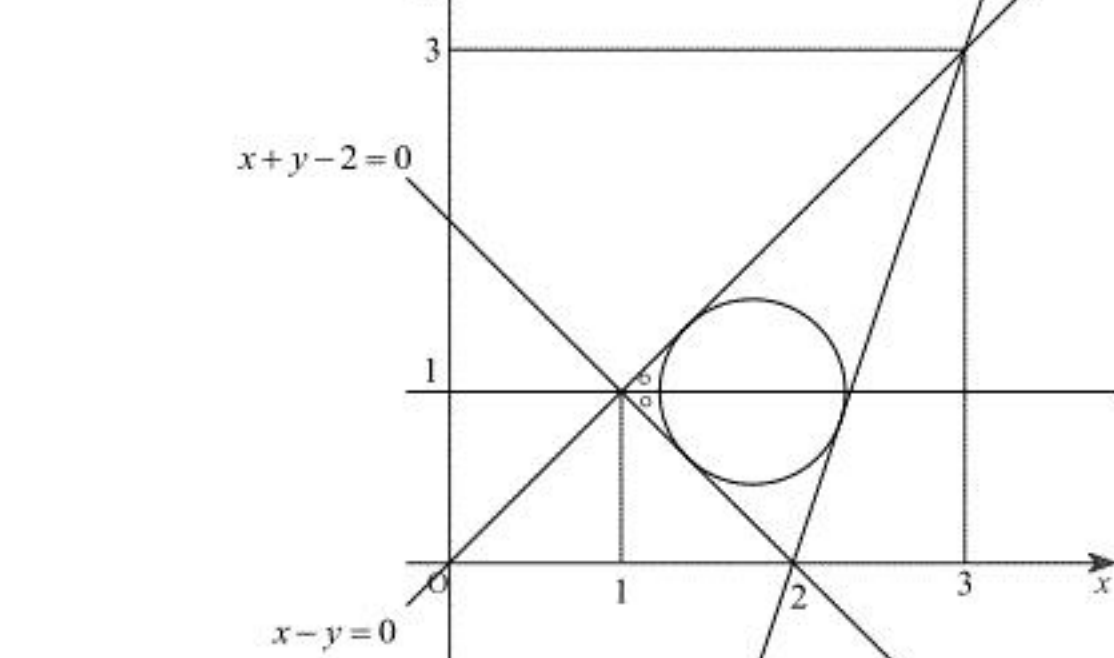


【解答】

ア	イ	ウ	エ	オ
$4-\sqrt{5}$	1	$2^4\cdot 3\cdot 17\cdot 19$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
カ	キ	ク	ケ	
$\frac{8\sqrt{3}}{9}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{5}{4}\log 2-\frac{3}{4}$	

【解説】

- (1)
- 3 直線 $x-y=0, x+y-2=0, 3x-y-6=0$ の各交点の座標を求めると、
- $$\begin{cases} x-y=0 \\ x+y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y)=(1, 1)$$
- $$\begin{cases} x-y=0 \\ 3x-y-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y)=(3, 3)$$
- $$\begin{cases} x+y-2=0 \\ 3x-y-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y)=(2, 0)$$
- である。3 直線の各交点を頂点とする三角形に内接する円を図示すると以下の通りである。



この内接円の中心は、三角形の角の二等分線上にある。2 直線 $x-y=0, x+y-2=0$ によって作られる角の二等分線は、図より、

$$y=1$$

である。よって、内接円の中心は実数 X を用いて $(X, 1)$ と置ける。また、 $(X, 1)$ と

$x-y=0, 3x-y-6=0$ の距離は等しいから、点と直線の距離の公式を用いて

$$\begin{aligned} \frac{|X-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} &= \frac{|3X-1-6|}{\sqrt{3^2+1^2}} \\ \Leftrightarrow \sqrt{5}|X-1| &= |3X-7| \\ \Leftrightarrow \sqrt{5}(X-1) &= \pm(3X-7) \\ \Leftrightarrow X &= 4\pm\sqrt{5} \end{aligned}$$

となる。図より、 $1 < X < 2$ を満たさなければいけないから、 $X=4-\sqrt{5}$ である。以上より、円の中心の座標は、

$$(4-\sqrt{5}, 1)$$

である。

(2)

$$\begin{aligned} {}_{20}C_7 &= \frac{20!}{13!7!} \\ &= \frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} \\ &= 2^4\cdot 3\cdot 5\cdot 17\cdot 19 \\ \frac{20!}{2^{10}\cdot 3^6\cdot 5^4\cdot 7^2} &= \frac{2^{18}\cdot 3^8\cdot 5^4\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19}{2^{10}\cdot 3^6\cdot 5^4\cdot 7^2} \\ &= 2^8\cdot 3^2\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19 \end{aligned}$$

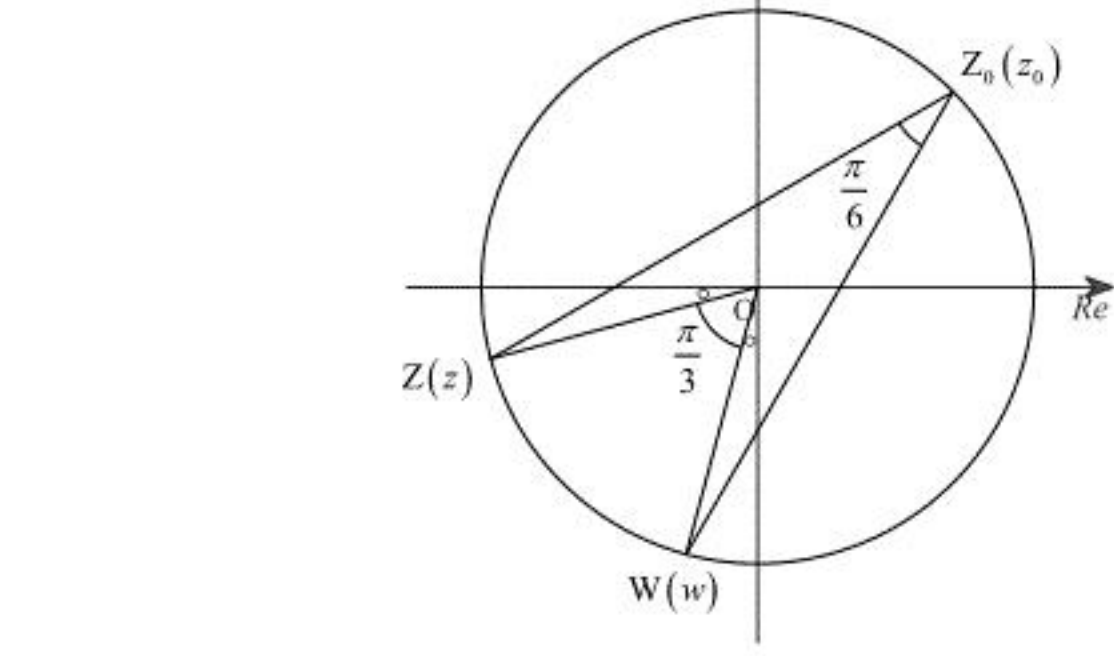
である。したがって最大公約数は

$$2^4\cdot 3\cdot 17\cdot 19$$

である。

(3)

原点を中心とする半径1の円と z, w を図示すると以下の通りである。



$Z(z), W(w), Z_0(z_0)$ として3点 Z, W, Z_0 を定める。 $\angle ZOW=\frac{\pi}{3}$ であるから、円周角の定理

より弧 ZW に対する円周角は $\frac{\pi}{6}$ である。よって、 $Z_0(z_0)$ は単位円周上にある。また、

$$|z-z_0|=|w-z_0|$$

であるから、 Z_0 は線分 ZW の垂直二等分線上にある。よって、 $|z_0|=1$ より

$$\begin{aligned} z_0 &= \cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i \end{aligned}$$

である。

(4)

$X=\tan x, H=\tan h$ とおくと

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{h\rightarrow 0} \frac{\frac{\tan x+\tan h}{1-\tan x\tan h}+\frac{\tan x-\tan h}{1+\tan x\tan h}-2\tan x}{h^2} \\ &= \lim_{h\rightarrow 0} \frac{\frac{X+H}{1-XH}+\frac{X-H}{1+XH}-2X}{h^2} \\ &= \lim_{h\rightarrow 0} \frac{(X+H)(1+XH)+(X-H)(1-XH)-2X(1-XH)(1+XH)}{h^2(1-XH)(1+XH)} \\ &= \lim_{h\rightarrow 0} \frac{2XH^2+2X^3H^2}{h^2(1-XH)(1+XH)} \\ &= \lim_{h\rightarrow 0} \left(\frac{\tan h}{h}\right)^2\cdot \frac{2\tan x+2\tan^3x}{(1-\tan x\tan h)(1+\tan x\tan h)} \\ &= 2\tan x+2\tan^3x \end{aligned}$$

である。したがって

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{6}\right) &= 2\tan\frac{\pi}{6}+2\tan^3\frac{\pi}{6} \\ &= \frac{8\sqrt{3}}{9} \end{aligned}$$

となる。

(5)

与式を変形すると、

$$\begin{aligned} 2\overline{AP}+3\overline{BP}+4\overline{CP} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow 2\overline{AP}+3\left(\overline{AP}-\overline{AB}\right)+4\left(\overline{AP}-\overline{AC}\right) &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \overline{AP} &= \frac{7}{9}\cdot\frac{3\overline{AB}+4\overline{AC}}{7} \\ \therefore \overline{AP} &= \frac{7}{9}\overline{AD} \end{aligned}$$

である。よって点 D は線分 BC を $4:3$ に内分する点であるから

$$\frac{BD}{DC}=\frac{4}{3}$$

である。また、 $\overline{AP}=\frac{7}{9}\overline{AD}$ より

$$\frac{AP}{PD}=\frac{7}{2}$$

である。

(6)

$t=\log(x^2+1)$ と置換すると、 $\frac{dt}{dx}=\frac{2x}{x^2+1}$ より $\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}dt$ である。また、積分区間は以下

のようになる。

x	$\sqrt{\sqrt{e}-1}$	$\rightarrow$	$\sqrt{e^2-1}$
t	$\frac{1}{2}$	$\rightarrow$	2

よって、

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt[4]{e-1}}^{\sqrt{e-1}}\frac{x\log\left(\log\left(x^2+1\right)\right)}{x^2+1}dx &= \int_{\sqrt[4]{e-1}}^{\sqrt{e-1}}\log\left(\log\left(x^2+1\right)\right)\cdot\frac{x}{x^2+1}dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^2\log t\cdot\frac{1}{2}dt \\ &= \frac{1}{2}\left[t\log t-t\right]_{\frac{1}{2}}^2 \\ &= \frac{5}{4}\log 2-\frac{3}{4} \end{aligned}$$

である。

【解答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ
$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{25}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{27}$
ク	ケ	コ	サ	シ	ス	
t	$\frac{t}{u}$	$1-\frac{t}{u}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{25}{72}$	$\frac{8+\sqrt{10}}{27}$	

【解説】

(1)(i)

$x \leq \frac{1}{3}$ において $y = \frac{1}{1-x}$ は単調に増加する。よって $x = \frac{1}{3}$ のときに y は最大値をとる。その値は、

$$\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

である。

(ii)

$y = \frac{5x-1}{x^2}$ を x で微分すると、

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{5}{x} - \frac{1}{x^2} \right)' \\ &= (-1) \cdot \frac{5}{x^2} - (-2) \cdot \frac{1}{x^3} \\ &= \frac{-5x+2}{x^3} \end{aligned}$$

である。よって、 $x > \frac{1}{3}$ における増減表は以下の通りである。

x	$\left(\frac{1}{3}\right)$	...	$\frac{2}{5}$	...
y'		+	0	-
y		$\nearrow$	$\frac{25}{4}$	$\searrow$

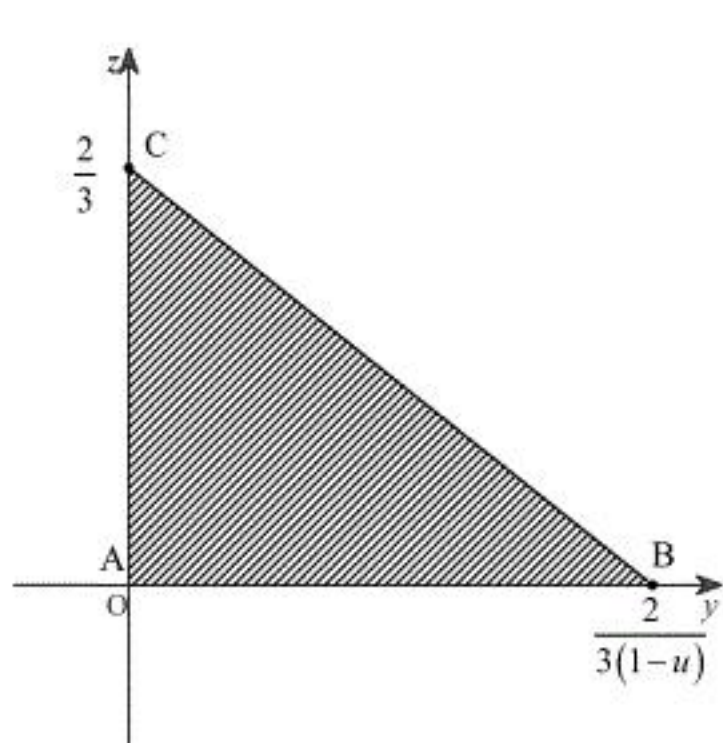
したがって、 $x = \frac{2}{5}$ のときに y は最大値 $\frac{25}{4}$ をとる。

(2)(i)

平面 H と線分 OP , PQ , PR の交点をそれぞれ A , B , C とする。直線 OP は x 軸と一致するから

$A\left(\frac{1}{3}, 0, 0\right)$ である。直線 PQ の式は $z=0$, $y = -\frac{1}{1-u}x + \frac{1}{1-u}$ で表されるから $B\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3(1-u)}, 0\right)$

である。直線 PR の式は $y=0$, $z=-x+1$ で表されるから $C\left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)$ である。よって、四面体 $OPQR$ を平面 H で切ったときの切り口の図は以下の通りである。



上図の斜線部の面積が S であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3(1-u)} \cdot \frac{2}{3} \\ &= \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{1-u} \end{aligned}$$

である。(1)(i)より、 S は $u = \frac{1}{3}$ のとき最大値

$$\frac{2}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{3}$$

をとる。また、四面体 $OPQR$ を底面が $\triangle OPQ$ の三角錐とみなすと、四面体 $OPQR$ の体積は、

$$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \right) \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

である。よって、 $V+W = \frac{1}{6}$ であるから

$$\begin{cases} V+W = \frac{1}{6} \\ 3V = 2W \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} V = \frac{1}{15} \\ W = \frac{1}{10} \end{cases}$$

となる。一方で

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{1-u} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \right)$$

$$= \frac{4}{81(1-u)}$$

であるから、 $\frac{1}{15} = \frac{4}{81(1-u)}$ より

$$u = \frac{7}{27}$$

である。

(2)(ii)

$$\overrightarrow{RQ} = (u, 1, -1)$$

である。平面 H と線分 RQ の交点を点 E とすると、実数 k を用いて、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OE} &= \overrightarrow{OR} + k\overrightarrow{RQ} \\ &= (ku, k, 1-k) \end{aligned}$$

と表される。点 E の x 座標は t であるから、

$$ku = t$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{t}{u}$$

である。よって、

$$\overrightarrow{OE} = \left(\frac{t}{u} \cdot u, \frac{t}{u}, 1 - \frac{t}{u} \right)$$

$$= \left(t, \frac{t}{u}, 1 - \frac{t}{u} \right)$$

である。

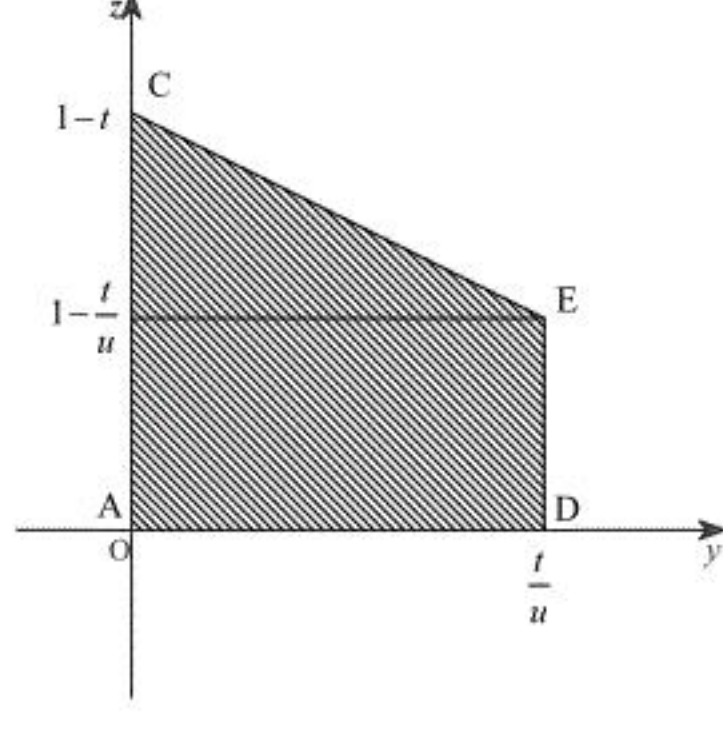
(2)(iii)

平面 H と線分 OQ の交点を D とする。 $0 \leq t \leq \frac{1}{3}$ のとき、(2)(ii)より $E\left(t, \frac{t}{u}, 1 - \frac{t}{u}\right)$ である。直

線 OP は x 軸と一致するから $A(t, 0, 0)$ である。直線 OQ の式は $z=0$, $y = \frac{x}{u}$ で表されるから

$D\left(t, \frac{t}{u}, 0\right)$ である。直線 PR の式は $y=0$, $z=-x+1$ で表されるから $C(t, 0, 1-t)$ である。よっ

て、四面体 $OPQR$ を平面 H で切ったときの切り口の図は以下の通りである。



上図の斜線部の面積が S だから

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left\{ (1-t) + \left(1 - \frac{t}{u} \right) \right\} \cdot \frac{t}{u}$$

$$= \frac{1}{u}t - \frac{1}{2u} \left(1 + \frac{1}{u} \right) t^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

である。ここで $t = \frac{1}{3}$ を代入して

$$S = \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{2u} \cdot \left(1 + \frac{1}{u} \right) \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^2$$

$$= \frac{1}{18} \cdot \frac{5u-1}{u^2}$$

である。(1)(ii)より、 S は $u = \frac{2}{5}$ のとき最大値

$$\frac{1}{18} \cdot \frac{25}{4} = \frac{25}{72}$$

をとる。また、 $V=W$ を満たすとき

$$\begin{cases} V+W = \frac{1}{6} \\ V=W \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow V=W = \frac{1}{12}$$

である。一方で、 $\textcircled{1}$ より

$$W = \int_0^{\frac{1}{3}} \left\{ \frac{1}{u}t - \frac{1}{2u} \left(1 + \frac{1}{u} \right) t^2 \right\} dt$$

$$= \left[\frac{1}{u} \cdot \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2u} \cdot \left(1 + \frac{1}{u} \right) \cdot \frac{t^3}{3} \right]_0^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{8u-1}{162u^2}$$

である。よって

$$\frac{8u-1}{162u^2} = \frac{1}{12}$$

$$\Leftrightarrow 27u^2 - 16u + 2 = 0$$

$$\therefore u = \frac{8+\sqrt{10}}{27} \left(\because u > \frac{1}{3} \right)$$

である。

【解答】									
ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
7	5	17	12	2	1	2	1	$1+\sqrt{2}$	$1-\sqrt{2}$
サ		シ		ス		セ		ソ	
$4-3\sqrt{2}$		$\frac{3}{2}+\sqrt{2}$		$\frac{3}{2}-\sqrt{2}$		$1+\frac{3\sqrt{2}}{4}$		$1-\frac{3\sqrt{2}}{4}$	
								$\sqrt{2}$	

【解説】

(1)

$$\begin{aligned} f_2(x) &= f_1\left(\frac{1}{x+2}\right) \\ &= \frac{\frac{1}{x+2}+3}{\frac{1}{x+2}+2} \\ &= \frac{1+3(x+2)}{1+2(x+2)} \\ &= \frac{3x+7}{2x+5} \end{aligned}$$

である。ゆえに

$$a_2=7, b_2=5$$

である。また,

$$\begin{aligned} f_3(x) &= f_2\left(\frac{1}{x+2}\right) \\ &= \frac{\frac{3}{x+2}+7}{\frac{2}{x+2}+5} \\ &= \frac{3+7(x+2)}{2+5(x+2)} \\ &= \frac{7x+17}{5x+12} \end{aligned}$$

である。したがって,

$$a_3=17, b_3=12$$

である。

(2)

$$\begin{aligned} f_{n+2}(x) &= f_{n+1}\left(\frac{1}{x+2}\right) \\ &= \frac{\frac{a_n}{x+2}+a_{n+1}}{\frac{b_n}{x+2}+b_{n+1}} \\ &= \frac{a_n+a_{n+1}(x+2)}{b_n+b_{n+1}(x+2)} \\ &= \frac{a_{n+1}x+2a_{n+1}+a_n}{b_{n+1}x+2b_{n+1}+b_n} \end{aligned}$$

であるから,

$$(a) \quad a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n$$

$$(b) \quad b_{n+2}=2b_{n+1}+b_n$$

となる。

(3)

(2)の(a)の特性方程式は

$$x^2=2x+1$$

であり, その解は,

$$x=1\pm\sqrt{2}$$

である。 $\alpha>\beta$ であるから

$$\alpha=1+\sqrt{2}$$

$$\beta=1-\sqrt{2}$$

である。 $c_n=a_{n+1}-\alpha a_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$) とおくとき, 数列 $\{c_n\}$ は初項 $a_2-\alpha a_1$, 公比 β の等比数列である。よって

$$\begin{aligned} c_n &= (a_2-\alpha a_1)\beta^{n-1} \\ &= \left\{7-3(1+\sqrt{2})\right\}\beta^{n-1} \\ &= (4-3\sqrt{2})\beta^{n-1} \end{aligned}$$

である。同様に,

$$\begin{aligned} a_{n+1}-\beta a_n &= (a_2-\beta a_1)\alpha^{n-1} \\ &= \left\{7-3(1-\sqrt{2})\right\}\alpha^{n-1} \\ &= (4+3\sqrt{2})\alpha^{n-1} \end{aligned}$$

である。よって,

$$\begin{aligned} a_{n+1}-\alpha a_n &= (4-3\sqrt{2})\beta^{n-1} \\ a_{n+1}-\beta a_n &= (4+3\sqrt{2})\alpha^{n-1} \end{aligned}$$

の辺々を引いて

$$\begin{aligned} (\alpha-\beta)a_n &= (4+3\sqrt{2})\alpha^{n-1}-(4-3\sqrt{2})\beta^{n-1} \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{2}a_n &= (4+3\sqrt{2})\alpha^{n-1}-(4-3\sqrt{2})\beta^{n-1} \\ \therefore a_n &= \left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)\alpha^{n-1}+\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)\beta^{n-1} \end{aligned}$$

である。(2)の(b)は,

$$\begin{aligned} b_{n+2}-\alpha b_{n+1} &= \beta(b_{n+1}-\alpha b_n) \\ b_{n+2}-\beta b_{n+1} &= \alpha(b_{n+1}-\beta b_n) \end{aligned}$$

と変形できるから, (2)の(a)と同様に

$$\begin{aligned} b_{n+1}-\alpha b_n &= (b_2-\alpha b_1)\beta^{n-1} \\ &= (3-2\sqrt{2})\beta^{n-1} \\ b_{n+1}-\beta b_n &= (b_2-\beta b_1)\alpha^{n-1} \\ &= (3+2\sqrt{2})\alpha^{n-1} \end{aligned}$$

である。したがって, 辺々を引くと

$$\begin{aligned} (\alpha-\beta)b_n &= (3+2\sqrt{2})\alpha^{n-1}-(3-2\sqrt{2})\beta^{n-1} \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{2}b_n &= (3+2\sqrt{2})\alpha^{n-1}-(3-2\sqrt{2})\beta^{n-1} \\ \therefore b_n &= \left(1+\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)\alpha^{n-1}+\left(1-\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)\beta^{n-1} \end{aligned}$$

となる。

(4)

$f_n(0)=\frac{a_n}{b_n}$ であるから, (3)より,

$$\begin{aligned} \lim_{n\rightarrow\infty}f_n(0) &= \lim_{n\rightarrow\infty}\frac{\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)\alpha^{n-1}+\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)\beta^{n-1}}{\left(1+\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)\alpha^{n-1}+\left(1-\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)\beta^{n-1}} \\ &= \lim_{n\rightarrow\infty}\frac{\frac{3}{2}+\sqrt{2}+\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}}{1+\frac{3\sqrt{2}}{4}+\left(1-\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}} \\ &= \frac{\frac{3}{2}+\sqrt{2}}{1+\frac{3\sqrt{2}}{4}}\left(\because\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|<1\right) \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

である。