

数 学

(医 学 部)

— 2 月 3 日 —

解答はすべて解答用紙に記入して提出しなさい。

メモ

次の空欄を埋めなさい。

解答は分数の場合には既約分数の形で書きなさい。

1

- (1) 3 直線 $x-y=0$, $x+y-2=0$, $3x-y-6=0$ の各交点を頂点とする三角形に内接する円の中心の座標は $(\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}})$ である。
- (2) ${}_{30}C_7$ と $\frac{20!}{2^{10} \cdot 3^6 \cdot 5^4 \cdot 7^2}$ の最大公約数を素因数分解すると $\boxed{\text{ウ}}$ である。
- (3) 複素数平面上の点 $z = \cos \frac{13}{12}\pi + i \sin \frac{13}{12}\pi$ を点 $z_0 = \boxed{\text{エ}} + \boxed{\text{オ}}i$ を中心に $\frac{\pi}{6}$ だけ回転した点は、 $w = \cos \frac{17}{12}\pi + i \sin \frac{17}{12}\pi$ である。ただし、 $\boxed{\text{エ}}$ と $\boxed{\text{オ}}$ は実数とする。
- (4) $f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan(x+h) + \tan(x-h) - 2 \tan x}{h^2}$ とするとき、 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \boxed{\text{カ}}$ である。
- (5) $\triangle ABC$ の内部にある点 P は、 $2\overrightarrow{AP} + 3\overrightarrow{BP} + 4\overrightarrow{CP} = \vec{0}$ を満たすという。2 点 A, P を結ぶ直線 AP と直線 BC との交点を D とするとき、 $\frac{BD}{CD} = \boxed{\text{キ}}$ であり、 $\frac{AP}{PD} = \boxed{\text{ク}}$ である。
- (6) $\int_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{e^2-1}} \frac{x \log(\log(x^2+1))}{x^2+1} dx = \boxed{\text{ケ}}$

2

- (1) (i) $x \leq \frac{1}{3}$ のとき、関数 $y = \frac{1}{1-x}$ は $x = \boxed{\text{ア}}$ で最大値 $\boxed{\text{イ}}$ をとる。
- (ii) $x > \frac{1}{3}$ のとき、関数 $y = \frac{5x-1}{x^2}$ は $x = \boxed{\text{ウ}}$ で最大値 $\boxed{\text{エ}}$ をとる。
- (2) u は実数、 t は $0 < t < 1$ を満たすとする。空間の 3 点 $P(1, 0, 0)$, $Q(u, 1, 0)$, $R(0, 0, 1)$ と平面 $H: x=t$ を考える。四面体 $OPQR$ を H で切ったとき、切り口の面積を S 、点 P を含む立体の体積を V 、原点 O を含む立体の体積を W とする。
- (i) $u \leq \frac{1}{3}$ かつ $t = \frac{1}{3}$ とする。 S は $u = \boxed{\text{オ}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{カ}}$ をとる。また、 $3V = 2W$ を満たす u の値は $u = \boxed{\text{キ}}$ である。
- (ii) $u > \frac{1}{3}$ かつ $0 < t \leq \frac{1}{3}$ とする。 H と線分 QR の交点の座標を u, t を用いて表すと、 $(\boxed{\text{ク}}, \boxed{\text{ケ}}, \boxed{\text{コ}})$ である。
- (iii) $u > \frac{1}{3}$ かつ $t = \frac{1}{3}$ とする。 S は $u = \boxed{\text{サ}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{シ}}$ をとる。また、 $V = W$ を満たす u の値は $u = \boxed{\text{ス}}$ である。

3

関数 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $\dots$ ($x \geq 0$) を以下で定める.

$$f_1(x) = \frac{x+3}{x+2}, \quad f_{n+1}(x) = f_n\left(\frac{1}{x+2}\right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき, 次の式を満たすように定められた数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を考える.

$$f_n(x) = \frac{a_{n-1}x + a_n}{b_{n-1}x + b_n} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

ただし, $a_1 = 3$, $b_1 = 2$ とする.

(1) $a_2 = \boxed{\text{ア}}$, $b_2 = \boxed{\text{イ}}$, $a_3 = \boxed{\text{ウ}}$, $b_3 = \boxed{\text{エ}}$

(2) 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ はそれぞれ次の漸化式を満たす.

(a) $a_{n+2} = \boxed{\text{オ}}$ $a_{n+1} + \boxed{\text{カ}}$ a_n ($n = 1, 2, 3, \dots$)

(b) $b_{n+2} = \boxed{\text{キ}}$ $b_{n+1} + \boxed{\text{ク}}$ b_n

(3) (2) の (a) は次のように変形できる.

$$\begin{cases} a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \\ a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このときの α , β の値はそれぞれ, $\alpha = \boxed{\text{ケ}}$, $\beta = \boxed{\text{コ}}$ である. ただし, $\alpha > \beta$ とする.

$c_n = a_{n+1} - \alpha a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおくと, 数列 $\{c_n\}$ の一般項は $c_n = \boxed{\text{サ}}$ β^{n-1} である.

したがって, $\{a_n\}$ の一般項 a_n は

$$a_n = \boxed{\text{シ}}$$
 $\alpha^{n-1} + \boxed{\text{ス}}$ β^{n-1}

である. また, $\{b_n\}$ の一般項 b_n は

$$b_n = \boxed{\text{セ}}$$
 $\alpha^{n-1} + \boxed{\text{ソ}}$ β^{n-1}

である. ただし, $\boxed{\text{サ}} \sim \boxed{\text{ソ}}$ は α , β を用いないで答えよ.

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = \boxed{\text{タ}}$

メモ

メモ

メモ

