

平成 11 年度入学試験問題

数 学

(前 期 日 程)

(注 意)

1. 問題冊子および解答用紙は係員の指示があるまで開かないこと。
2. 解答用紙は B 4 版 4 枚である。
3. 医学部・歯学部・薬学部志願者は 1, 2 ページにある 4 題に, 総合科学部・工学部志願者は 1, 3 ページにある 4 題に答えよ。
4. 解答は解答用紙の指定された番号の解答欄に書くこと。指定された解答欄以外に書いたものは採点しない。
5. 筆答開始後, 解答用紙の所定欄に受験番号をはっきり記入すること。

1. 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ。ただし、 a, b, c, d は実数で、 $bc \neq 0$ とする。
- (1) $p = a + d$, $q = ad - bc$ とするとき、 $A^2 - pA + qE$ を求めよ。
 - (2) $A^3 = xA + yE$ となる数 x と y を p, q を用いて表せ。
 - (3) $A^3 = E$ のとき、 p, q の値を求めよ。
2. 方程式 $y^2 = 4(x + 2)^2$ の表す図形を C とし、点 $(2, 0)$ を通る直線 l の方程式を $y = mx + n$ とするとき、次の問いに答えよ。
- (1) n を m で表し、 C と l がただ 1 つの共有点をもつための条件を m で表せ。
 - (2) C と l が異なる 2 点 P, Q で交わるとき、線分 PQ の中点を $R(p, q)$ とする。 p, q を m で表せ。
 - (3) 上の p, q の満たす方程式を求めよ。

3. 関数 $f(x)$ を次のように定義する。ただし、 e は自然対数の底 ($e = 2.7182\cdots$) である。

$$f(x) = ex - \int_1^x t \log t \, dt \quad \left(\frac{1}{e^2} \leq x \leq e^2 \right)$$

この関数 $f(x)$ の最大値、最小値を求めよ。

4. n が自然数のとき、1 から n までの自然数の積を $n!$ で表す。次の問いに答えよ。

- (1) $x > 0$ のとき、不等式 $2\sqrt{x} > \log x$ を示せ。
- (2) 極限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ および $\lim_{y \rightarrow 0} y \log |y| = 0$ を示せ。
- (3) $a_k = \int_k^{k+1} \log x \, dx$ とおくとき、 $a_{k-1} \leq \log k \leq a_k$ ($k = 2, 3, 4, \dots$) を示せ。
- (4) 対数を利用して極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}$ を求めよ。

3. 円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点 $P(a, b)$ における接線を l とする。直線 l が x 軸および y 軸と交わるとき、これらの 3 直線で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる円錐を A とする。次の問いに答えよ。
- (1) 直線 l の方程式を求めよ。
 - (2) 円錐 A の体積 V を求めよ。
 - (3) 体積 V の最小値を求めよ。また、 V が最小となるときの点 $P(a, b)$ の座標をすべて答えよ。
4. 直線 $y = x$ と曲線 $y = x + \cos x$ ($0 \leq x \leq \pi$) で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。