

1. a, b, c を定数として, 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ および $X = E + A$ を考え

る。ただし, E は 3 次の単位行列とする。次の問いに答えよ。

(1) A^2 および A^3 を求めよ。

(2) n を自然数とすると, $X^n = E + nA + \frac{n(n-1)}{2} A^2$ が成り立つことを証明せよ。

(3) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{15}$ を求めよ。

2. 関数 $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ について、次の問いに答えよ。

(1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2) 関数 $y = f(x)$ のグラフをえがき、 $f(x)$ の最大値を求めよ。

(3) $f(\alpha) = f(\beta)$ を満たす正の数 α, β ($0 < \alpha < \beta$) に対して、 $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \log \beta$ が成り立つことを示せ。

3. p を正の定数として、放物線 $y^2 = 4px$ の第1象限($x > 0, y > 0$)にある部分を C とする。 C 上の点 P における接線を l とし、 l と x 軸の交点を $Q(a, 0)$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) 接線 l の方程式を $y = m(x - a)$ として、 l の傾き m を a, p を用いて表せ。
- (2) 接点 P の座標を a, p を用いて表せ。
- (3) 線分 PQ を $r : 1$ ($r > 0$) の比に内分する点を R とする。点 P が C 上を動くとき、点 R はどのような図形をえがくか。

4. 関数 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $\dots$, $f_n(x)$, $\dots$ を

$$f_1(x) = (x^2 - 10x + 30)e^x, f_{n+1}(x) = f'_n(x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定義する。次の問いに答えよ。

(1) $f_n(x) = (x^2 + a_n x + b_n)e^x$ において数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を定義する。 a_{n+1} ,

b_{n+1} と a_n , b_n の関係を求め、一般項 a_n , b_n を n の式で表せ。

(2) p , q を実数とすると、曲線 $y = (x^2 + px + q)e^x$ が変曲点をもつための条件を求めよ。

(3) 曲線 $y = f_n(x)$ が変曲点をもつような n をすべて求めよ。

問題はこのページで終わりである。