

1. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく。ただし, a, b, c は実数で, $a^2 + bc = 1$,

$b \neq 0$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) ある実数 k に対して, $A^2 + A - E = kA$ が成り立つことを示せ。
- (2) x, y を実数とし, $P = xA + yE$ とおく。 P が $P^2 + P - E = A$ を満たすような実数の組 (x, y) をすべて求めよ。

2. 関数 $f(x) = \int_0^x \frac{x}{1+t^2} dt$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 第2次導関数 $f''(x)$ を求めよ。
- (2) 導関数 $f'(x)$ において、 $f'(x) = 0$ となるのは $x = 0$ だけに限ることを示せ。
- (3) 関数 $f(x)$ の最小値、および最小値を与える x の値を求めよ。

3. n を自然数とし, $f_n(x) = x^n e^{-x}$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $x > 0$ において, $f_n(x)$ の最大値 M_n を求めよ。

(2) $f_{n+1}(x)$ の最大値 M_{n+1} を利用して, $\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ を示せ。

(3) $F(x) = \int_{\log 2}^x \{f_3(t) - 3f_2(t)\} dt$ とおくとき, $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$ を求めよ。

4. 双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ の $x < 0$ の部分を C_1 , 双曲線 $x^2 - (y - 4)^2 = 1$ の $x > 0$ の部分を C_2 とする。次の問いに答えよ。

- (1) C_1 上の点 P_1 における接線 l_1 と C_2 上の点 P_2 における接線 l_2 の傾きが共に m に等しいとする。 $m < -1$ のとき, P_1, P_2 の座標をそれぞれ m を用いて表せ。
- (2) (1)において, P_1 を通り l_1 に垂直な直線が P_2 を通るとき, m の値を求めよ。
- (3) 点 Q_1 が C_1 上を動き, 点 Q_2 が C_2 上を動くとき, 線分 Q_1Q_2 の長さの最小値を求めよ。