

第1問

(1)

$f(x) = x^2 + (4-2k)x + 2k^2 - 8k + 4$ とおく。

(i)

求める条件は、

$$f(0) = 2k^2 - 8k + 4 > 0$$

$$\Leftrightarrow k^2 - 4k + 2 > 0$$

$$\therefore k < 2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2} < k$$

である。

$$(\text{答}) \quad k < 2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2} < k$$

(ii)

$$f(x) = (x+2-k)^2 + k^2 - 4k$$

より、放物線 $y = f(x)$ について

$$\text{軸: } k-2 > 0$$

$$\text{頂点の } y \text{ 座標: } k^2 - 4k < 0$$

$$f(0) > 0$$

の3つの条件が成り立てばよい。よって、求める条件は

$$k > 2 \text{ かつ } 0 < k < 4 \text{ かつ } k < 2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2} < k$$

$$\Leftrightarrow 2 + \sqrt{2} < k < 4$$

である。

$$(\text{答}) \quad 2 + \sqrt{2} < k < 4$$

(2)

$P(x)$ を $x^2 - 2x, x+1, x^2 - x - 2$ で割ったときの商をそれぞれ $Q(x), R(x), S(x)$ とおく。また、

$P(x)$ を $x^2 - x - 2$ で割ったときの余りは、高々1次式であるから、 $ax+b$ とおける。すると、

$$P(x) = x(x-2)Q(x) - 6x - 4 \quad \dots\dots ①$$

$$P(x) = (x+1)R(x) - 1 \quad \dots\dots ②$$

$$P(x) = (x+1)(x-2)S(x) + ax + b \quad \dots\dots ③$$

と表せる。

$$\text{①より, } P(2) = -16$$

$$\text{②より, } P(-1) = -1$$

$$\text{③より, } P(2) = 2a+b, P(-1) = -a+b$$

であるから、

$$\begin{cases} 2a+b = -16 \\ -a+b = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = -5, b = -6$$

となる。したがって、求める余りは $-5x-6$ である。

$$(\text{答}) \quad -5x-6$$

第2問

(1)

$$S_n = 2n + 3a_n \quad \dots \textcircled{1}$$

とする。①に $n=1$ を代入すると、

$$\begin{aligned} S_1 &= 2 + 3a_1 \\ \Leftrightarrow a_1 &= 2 + 3a_1 \\ \therefore a_1 &= -1 \end{aligned}$$

を得る。また、①に $n=2$ を代入すると、

$$\begin{aligned} S_2 &= 4 + 3a_2 \\ \Leftrightarrow -1 + a_2 &= 4 + 3a_2 \\ \therefore a_2 &= -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad a_1 = -1, a_2 = -\frac{5}{2}$$

(2)

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= S_{n+1} - S_n \\ &= 2(n+1) + 3a_{n+1} - 2n - 3a_n \\ &= 3a_{n+1} - 3a_n + 2 \\ \therefore a_{n+1} &= \frac{3}{2}a_n - 1 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n - 1$$

(3)

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{3}{2}a_n - 1 \\ \Leftrightarrow a_{n+1} - 2 &= \frac{3}{2}(a_n - 2) \end{aligned}$$

より、数列 $\{a_n - 2\}$ は初項 $a_1 - 2 = -3$ 、公比 $\frac{3}{2}$ の等比数列であるから

$$\begin{aligned} a_n - 2 &= -3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \\ \therefore a_n &= 2 - 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} S_n &= 2n + 3a_n \\ &= 2n + 6 - 6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_n = 2 - 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n, S_n = 2n + 6 - 6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

第3問

(1)

$y^2 \leq 20$ を満たす整数 y は、

$$y = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$$

の9個ある。

(答) 9個

(2)

$x = 2$ のとき、

$$x^2 + y^2 \leq 20$$

$$\Leftrightarrow y^2 \leq 16$$

より、これを満たす整数 y は、(1)と同じく9個である。

(答) 9個

(3)

$$x^2 + y^2 \leq 20 \cdots \textcircled{1}$$

とする。

[1] $x = 0, \pm 1, \pm 2$ のとき

①を満たす整数 y は(1)、(2)の結果よりそれぞれ9個である。

[2] $x = \pm 3$ のとき

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow y^2 \leq 11$$

を満たす整数 y は

$$y = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$$

の7個である。

[3] $x = \pm 4$ のとき

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow y^2 \leq 4$$

を満たす整数 y は

$$y = 0, \pm 1, \pm 2$$

の5個である。

[4] $|x| \geq 5$ のとき

$$\textcircled{1} \Rightarrow y^2 \leq -5$$

より、これを満たす整数 y は存在しない。

以上より、集合 S の要素の個数は

$$9 \cdot 5 + 7 \cdot 2 + 5 \cdot 2 = 69 \text{ 個}$$

である。

(答) 69個

第4問

(1)

$$a + \frac{1}{\sqrt{a}} = p$$

$$a - \frac{1}{\sqrt{a}} = q$$

とおく。 $a > 0$ より、放物線 $y = x^2 + a^2$ は常に x 軸より上側にあるので、求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_q^p (x^2 + a^2) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + a^2x \right]_q^p \\ &= \frac{1}{3}(p^3 - q^3) + a^2(p - q) \\ &= \frac{1}{3}\{(p - q)^3 + 3pq(p - q)\} + a^2(p - q) \\ &= \frac{1}{3}\left\{8a^{-\frac{3}{2}} + 3\left(a^2 - \frac{1}{a}\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{a}}\right\} + a^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{a}} \left(\because p - q = \frac{2}{\sqrt{a}}, pq = a^2 - \frac{1}{a}\right) \\ &= 4a^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}a^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 4a^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}a^{-\frac{3}{2}}$$

(2)

$a > 0$ より、 $a^{\frac{3}{2}} > 0$ 、 $a^{-\frac{3}{2}} > 0$ であるから、相加相乗平均の関係より

$$S = 4a^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}a^{-\frac{3}{2}} \geq 2\sqrt{4a^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3}a^{-\frac{3}{2}}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

が成り立つ。等号成立は、

$$4a^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}a^{-\frac{3}{2}}$$

$$\Leftrightarrow a^3 = \frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow a = 6^{-\frac{1}{3}}$$

のときである。よって、 S は $a = 6^{-\frac{1}{3}}$ のとき、最小値 $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ を取る。

$$(\text{答}) \quad \text{最小値} \frac{4\sqrt{6}}{3} \quad (a = 6^{-\frac{1}{3}} \text{ のとき})$$