

第1問

(1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{AB} &= (1, 1, 1) \cdot (-1, 1, 0) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{BC} &= (1, 1, 1) \cdot (0, -1, 1) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{CA} &= (1, 1, 1) \cdot (1, 0, -1) \\ &= 0\end{aligned}$$

であり、 $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ はいずれも $\vec{0}$ ではないから、 $\overrightarrow{OD}$ は3つのベクトル $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ のそれぞれに垂直である。

(証明終)

(2)

平面ABCと直線ODとの交点をEとおく。Eは直線OD上の点であるから、実数 k を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE} &= k \overrightarrow{OD} \\ &= k \overrightarrow{OA} + k \overrightarrow{OB} + k \overrightarrow{OC} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

と表せる。また、Eは平面ABC上の点であるから、実数 s, t を用いて

$$\overrightarrow{OE} = s \overrightarrow{OA} + t \overrightarrow{OB} + (1-s-t) \overrightarrow{OC} \quad \dots \textcircled{2}$$

と表せる。 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ は1次独立であるから、①, ②より

$$\begin{cases} k = s \\ k = t \\ k = 1-s-t \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow k = s = t = \frac{1}{3}$$

を得る。よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE} &= \frac{1}{3} \overrightarrow{OD} \\ &= \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)\end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

(3)

(1)より、平面ABCと直線ODは垂直であるので、四面体OABCと四面体DABCの体積比は、 $\triangle ABC$ を底面にして考えることにより、 $OE:DE$ に等しくなることがわかる。ここで、(2)より

$$\begin{aligned}OE:DE &= \frac{1}{3}OD:\frac{2}{3}OD \\ &= 1:2\end{aligned}$$

であるから、求める体積比は1:2となる。

(答) 1:2

第2問

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - 2\cos x + \cos 2x \\ &= 1 - 2\cos x + (2\cos^2 x - 1) \\ &= 2\cos^2 x - 2\cos x \\ &= 2\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

で、 $0 \leq x \leq 2\pi$ のとき、 $-1 \leq \cos x \leq 1$ であるから、 $f(x)$ は

$$\begin{cases} \text{最大値 } 4 \quad (\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi \text{ のとき}) \\ \text{最小値 } -\frac{1}{2} \quad (\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi \text{ のとき}) \end{cases}$$

をとる。

$$(\text{答}) \begin{cases} \text{最大値 } 4 \quad (x = \pi \text{ のとき}) \\ \text{最小値 } -\frac{1}{2} \quad (x = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi \text{ のとき}) \end{cases}$$

(2)

求める体積を V とおくと、

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{2\pi} \{f(x)\}^2 dx \\ &= \pi \int_0^{2\pi} \{2(\cos^2 x - \cos x)\}^2 dx \\ &= 4\pi \int_0^{2\pi} (\cos^4 x - 2\cos^3 x + \cos^2 x) dx \end{aligned}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{2\pi} \\ &= \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^3 x dx &= \int_0^{2\pi} \cos x (1 - \sin^2 x) dx \\ &= \int_0^0 (1 - t^2) dt \quad (t = \sin x \text{ とおいた}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^4 x dx &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2x)^2 dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} + 2\cos 2x + \frac{1}{2} \cos 4x \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{3}{2} x + \sin 2x + \frac{1}{8} \sin 4x \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{3}{4} \pi \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} V &= 4\pi \left(\frac{3}{4} \pi + \pi \right) \\ &= 7\pi^2 \end{aligned}$$

となる。

(答) $7\pi^2$

第3問

(1)

求める行列は

$$\begin{pmatrix} \cos(-60^\circ) & -\sin(-60^\circ) \\ \sin(-60^\circ) & \cos(-60^\circ) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

(2)

(1)で求めた行列を G 、点 P_n の座標を (c_n, d_n) とおく。 f によって、 P_n は P_{n+1} に移ることと、 g によって、 P_n が Q_n に移ることから、

$$\begin{pmatrix} c_{n+1} \\ d_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix}$$

が成り立つ。よって、 G の行列式は $1(\neq 0)$ であることから逆行列 G^{-1} が存在することに注意して、

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} c_{n+1} \\ d_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$= GA \begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix}$$

$$= GAG^{-1} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

となる。したがって、求める行列は

$$B = GAG^{-1}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 7 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{32} \begin{pmatrix} 8 & 8\sqrt{3} \\ -4\sqrt{3} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

である。

$$(\text{答}) \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(3)

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

であるから、(2)の結果より、

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = B^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$$

となる。よって、

$$\begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix} = G^{-1} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

$$\therefore P_n \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n, \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right)$$

である。

$$(\text{答}) \quad P_n \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n, \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right)$$

第4問

(1)

$A \rightarrow C$ の道筋は、

$$\frac{8!}{4!4!} = 70 \text{ (通り)}$$

であり、 $C \rightarrow G$ の道筋は、辺 CG 上を進む 1 通りのみである。したがって、求める場合の数は

$$70 \cdot 1 = 70 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 70 通り

(2)

立方体を展開したときの、長方形 $AFGD$ における $A \rightarrow G$ の道筋の総数を求めればよく、

$$\frac{12!}{8!4!} = 495 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 495 通り

(3)

(2)と同様にして、辺 CD 上の少なくとも 1 点を通る道筋も 495 通りである。また、(1)より点 C を通る道筋は 70 通りであるから、点 C を通る道筋が重複していることを考慮して、求める場合の数は

$$495 + 495 - 70 = 920 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 920 通り

(4)

全ての道筋は、辺 BC , CD , DH , HE , EF , FB 上の少なくとも 1 点を通る。それぞれの辺について、その辺上の少なくとも 1 点を通る道筋は(2)より 495 通りである。また、点 B , C , D , H , E , F を通る道筋が重複しており、それぞれの点について、その点を通る道筋は 70 通りあるので、求める場合の数は

$$495 \cdot 6 - 70 \cdot 6 = 2550 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 2550 通り