

第1問

(1)

$y^2 \leq 20$ を満たす整数 y は、

$$y = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$$

の9個ある。

(答) 9個

(2)

$x = 2$ のとき、

$$x^2 + y^2 \leq 20$$

$$\Leftrightarrow y^2 \leq 16$$

より、これを満たす整数 y は、(1)と同じく9個である。

(答) 9個

(3)

$$x^2 + y^2 \leq 20 \cdots \textcircled{1}$$

とする。

[1] $x = 0, \pm 1, \pm 2$ のとき

①を満たす整数 y は(1), (2)の結果よりそれぞれ9個である。

[2] $x = \pm 3$ のとき

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow y^2 \leq 11$$

を満たす整数 y は

$$y = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$$

の7個である。

[3] $x = \pm 4$ のとき

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow y^2 \leq 4$$

を満たす整数 y は

$$y = 0, \pm 1, \pm 2$$

の5個である。

[4] $|x| \geq 5$ のとき

$$\textcircled{1} \Rightarrow y^2 \leq -5$$

より、これを満たす整数 y は存在しない。

以上より、集合 S の要素の個数は

$$9 \cdot 5 + 7 \cdot 2 + 5 \cdot 2 = 69 \text{ 個}$$

である。

(答) 69個

第2問

(1)

$$S_n = 2n + 3a_n \quad \cdots \textcircled{1}$$

とする。①に $n=1$ を代入すると、

$$\begin{aligned} S_1 &= 2 + 3a_1 \\ \Leftrightarrow a_1 &= 2 + 3a_1 \\ \therefore a_1 &= -1 \end{aligned}$$

を得る。また、①に $n=2$ を代入すると、

$$\begin{aligned} S_2 &= 4 + 3a_2 \\ \Leftrightarrow -1 + a_2 &= 4 + 3a_2 \\ \therefore a_2 &= -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad a_1 = -1, a_2 = -\frac{5}{2}$$

(2)

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= S_{n+1} - S_n \\ &= 2(n+1) + 3a_{n+1} - 2n - 3a_n \\ &= 3a_{n+1} - 3a_n + 2 \\ \therefore a_{n+1} &= \frac{3}{2}a_n - 1 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n - 1$$

(3)

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{3}{2}a_n - 1 \\ \Leftrightarrow a_{n+1} - 2 &= \frac{3}{2}(a_n - 2) \end{aligned}$$

より、数列 $\{a_n - 2\}$ は初項 $a_1 - 2 = -3$ 、公比 $\frac{3}{2}$ の等比数列であるから

$$\begin{aligned} a_n - 2 &= -3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \\ \therefore a_n &= 2 - 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} S_n &= 2n + 3a_n \\ &= 2n + 6 - 6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_n = 2 - 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n, S_n = 2n + 6 - 6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

第3問

(1)

$$f(x) = 1 - 2\cos x + \cos 2x$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\sin x - 2\sin 2x \\ &= 2\sin x(1 - 2\cos x) \end{aligned}$$

であり、 $0 < x < 2\pi$ のとき

$$f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0, \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5}{3}\pi$$

となるから、 $0 \leq x \leq 2\pi$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	π	...	$\frac{5}{3}\pi$	...	2π
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0

したがって、 $f(x)$ は

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{最大値 } 4 \quad (x = \pi \text{ のとき}) \\ \text{最小値 } -\frac{1}{2} \quad (x = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi \text{ のとき}) \end{array} \right.$$

をとる。

$$(\text{答}) \left\{ \begin{array}{l} \text{最大値 } 4 \quad (x = \pi \text{ のとき}) \\ \text{最小値 } -\frac{1}{2} \quad (x = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi \text{ のとき}) \end{array} \right.$$

(2)

$0 \leq x \leq 2\pi$ のとき、

$$f(x) = 0$$

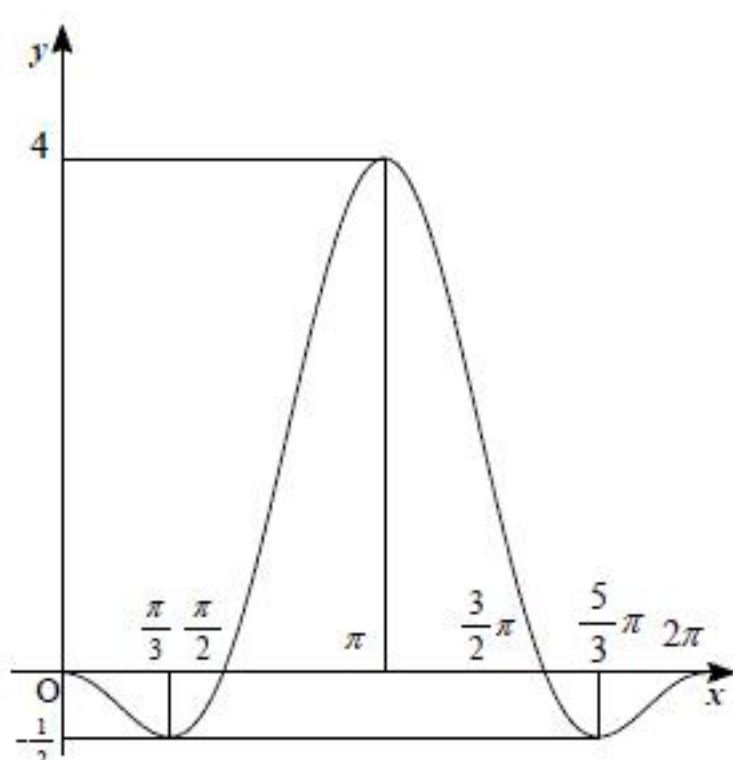
$$\Leftrightarrow 1 - 2\cos x + (2\cos^2 x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x(\cos x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0, 1$$

$$\Leftrightarrow x = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$$

であるから、(1)で求めた増減表も用いて、 $0 \leq x \leq 2\pi$ における $y = f(x)$ のグラフは次のようになる。



$f(x) = 1 - 2\cos x + \cos 2x$ の原始関数の 1 つを

$$F(x) = x - 2\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$$

とおく。上図より、求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{-f(x)\} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} f(x) dx + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \{-f(x)\} dx \\ &= \left\{ F(0) - F\left(\frac{\pi}{2}\right) \right\} + \left\{ F\left(\frac{3}{2}\pi\right) - F\left(\frac{\pi}{2}\right) \right\} + \left\{ F\left(\frac{3}{2}\pi\right) - F(2\pi) \right\} \\ &= F(0) - 2F\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2F\left(\frac{3}{2}\pi\right) - F(2\pi) \\ &= 0 - 2\left(\frac{\pi}{2} - 2\right) + 2\left(\frac{3}{2}\pi + 2\right) - 2\pi \\ &= 8 \end{aligned}$$

となる。

第4問

(1)

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ a & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ a-1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より、 $Q(-1, a-1)$ である。また、

$$\begin{aligned} A^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= A \cdot A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ a & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ a-1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-2a \\ 1-2a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より、 $R(1-2a, 1-2a)$ である。

(答) $Q(-1, a-1), R(1-2a, 1-2a)$

(2)

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ} = (-2, a-2) \\ \overrightarrow{QR} = (2-2a, 2-3a) \\ \overrightarrow{RP} = (2a, 2a) \end{cases}$$

である。まず、 $\triangle PQR$ が存在するためには、 $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{QR}, \overrightarrow{RP}$ がどれも $\vec{0}$ でない、かつ、どのベクトル同士も平行でないことが必要十分である。 $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{QR}$ が $\vec{0}$ となることはないので、前者の条件は

$$\begin{aligned} \overrightarrow{RP} &\neq \vec{0} \\ \Leftrightarrow a &\neq 0 \end{aligned}$$

であり、 $a \neq 0$ の下では $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{RP}$ が平行になることはなく、 $\overrightarrow{QR}, \overrightarrow{RP}$ が平行になることもないので、後者の条件は

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &\text{と} \overrightarrow{QR} \text{が平行でない} \\ \Leftrightarrow -2 : (2-2a) &\neq (a-2) : (2-3a) \\ \Leftrightarrow (2-2a)(a-2) &\neq -2(2-3a) \\ \Leftrightarrow a &\neq 0 \end{aligned}$$

となる。よって、 $\triangle PQR$ が直角三角形となるための必要十分条件は、 $a \neq 0$ の下で

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QR} &= 0 \text{ または } \overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{RP} = 0 \text{ または } \overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0 \\ \Leftrightarrow -3a^2 + 12a - 8 &= 0 \text{ または } 2a(4-5a) = 0 \text{ または } 2a(a-4) = 0 \\ \Leftrightarrow a &= 4, \frac{4}{5}, \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{3} \quad (\because a \neq 0) \end{aligned}$$

となる。

(答) $a = 4, \frac{4}{5}, \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{3}$

(3)

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ} = (-2, a-2) \\ \overrightarrow{PR} = (-2a, -2a) \end{cases}$$

より、 $a \neq 0$ の下では、 $\triangle PQR$ の面積は

$$\frac{1}{2} |-2 \cdot (-2a) - (-2a)(a-2)| = a^2$$

である。(2)で求めた a はどれも正の実数であるから、(2)で求めた a のうち、最も大きいものが面積を最大にする。

$$4 > \frac{4}{5}, \frac{6+2\sqrt{3}}{3} > \frac{6-2\sqrt{3}}{3}$$

より、題意を満たす a は $4, \frac{6+2\sqrt{3}}{3}$ のうち大きい方であるが、

$$\frac{6+2\sqrt{3}}{3} < \frac{6+2 \cdot 3}{3} = 4$$

であるので、面積を最大にする a は $a=4$ である。このとき、面積の最大値は

$$4^2 = 16$$

であり、

$$P(1, 1), Q(-1, 3), R(-7, -7)$$

である。

(答) 最大値 16 ($P(1, 1), Q(-1, 3), R(-7, -7)$ のとき)