

# 第1問

(1)

$$\frac{2a-1}{2+\sqrt{2}} = \frac{2a-1}{2+\sqrt{2}} \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = 2a-1 - \frac{2a-1}{2}\sqrt{2} = b-2\sqrt{2}$$

$a, b$  は有理数なので,

$$\begin{cases} 2a-1=b \\ \frac{2a-1}{2}=2 \end{cases}$$

が成立する。よって

$$\begin{cases} a=\frac{5}{2} \\ b=4 \end{cases}$$

$$(\text{答}) \begin{cases} a=\frac{5}{2} \\ b=4 \end{cases}$$

(2)

$$x=2-\sqrt{3} \Leftrightarrow x-2=-\sqrt{3}$$

より, 両辺を2乗して,

$$(x-2)^2 = (-\sqrt{3})^2$$

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

これより

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - 6x - 1 &= (x+3)(x^2 - 4x + 1) + 5x - 4 \\ &= 5x - 4 \\ &= 6 - 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) 6 - 5\sqrt{3}$$

(3)

$\angle BAC = \theta$  と表す。

余弦定理より,

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} \\ &= \frac{7^2 + 9^2 - 5^2}{2 \cdot 7 \cdot 9} \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

$\sin \theta > 0$  であるから,

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \frac{\sqrt{11}}{6} \end{aligned}$$

よって正弦定理より,

$$\begin{aligned} \frac{BC}{\sin \theta} &= 2R \\ \therefore R &= \frac{15\sqrt{11}}{11} \end{aligned}$$

ここで,

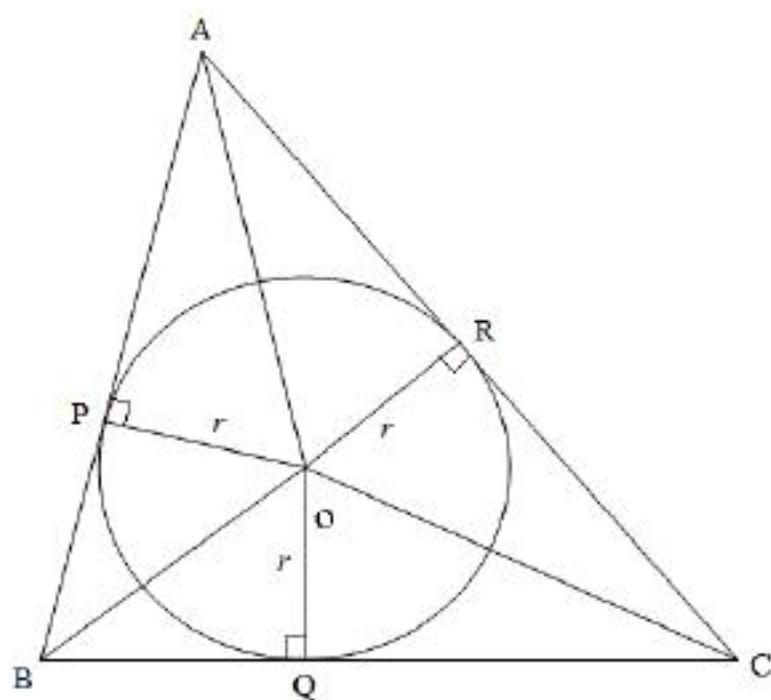
$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \frac{1}{2} AB \cdot CA \sin \theta \\ &= \frac{21\sqrt{11}}{4} \end{aligned}$$

さらに図のように点  $O, P, Q, R$  を定めると,

$$\triangle OAB + \triangle OBC + \triangle OCA = \triangle ABC$$

が成り立つ。したがって,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} r (7+5+9) &= \frac{21\sqrt{11}}{4} \\ \therefore r &= \frac{\sqrt{11}}{2} \end{aligned}$$



$$(\text{答}) R = \frac{15\sqrt{11}}{11}, r = \frac{\sqrt{11}}{2}$$

## 第2問

(1)

$$\log_2 a_1 = \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$$

また

$$a_2 = 2\sqrt{a_1} = 2^{\frac{7}{4}}$$

であるから

$$\log_2 a_2 = \log_2 2^{\frac{7}{4}} = \frac{7}{4}$$

$$(\text{答}) \quad \log_2 a_1 = \frac{3}{2}, \quad \log_2 a_2 = \frac{7}{4}$$

(2)

与えられた漸化式の両辺の対数（底は2）をとると

$$\log_2 a_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} \log_2 a_n$$

よって、 $\log_2 a_n = b_n$  とおくと

$$b_{n+1} = \frac{1}{2} b_n + 1$$

これを变形すると

$$b_{n+1} - 2 = \frac{1}{2} (b_n - 2)$$

これより、数列  $b_n - 2$  は、初項  $b_1 - 2 = -\frac{1}{2}$ 、公比  $\frac{1}{2}$  の等比数列となるので

$$\begin{aligned} b_n - 2 &= -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} \\ &= -\left( \frac{1}{2} \right)^n \end{aligned}$$

よって  $\log_2 a_n = b_n$  より

$$a_n = 2^{b_n} = 2^{-\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2}$$

$$(\text{答}) \quad a_n = 2^{-\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2}$$

(3)

$\log_2 a_n = b_n$  より

$$\sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n \log_2 a_k = \log_2 a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n$$

である。

$$b_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$$

より

$$\sum_{k=1}^n b_k = -\frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} + 2n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 1$$

である。よって、

$$\log_2 a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 1$$

なので

$$a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n = 2^{-\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 1}$$

$$(\text{答}) \quad a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n = 2^{-\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 1}$$

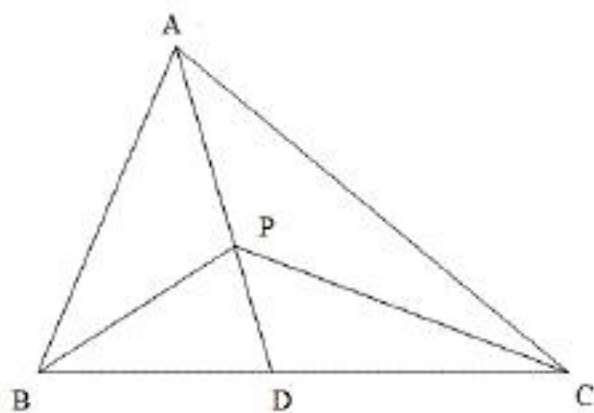
### 第3問

(1)

$$\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = |\overrightarrow{PB}| |\overrightarrow{PC}| \cos \angle BPC$$

より

$$\cos \angle BPC = \frac{\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PB}| |\overrightarrow{PC}|}$$



$0 < \angle BPC < \pi$  より,

$$\sin \angle BPC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle BPC} = \frac{\sqrt{|\overrightarrow{PB}|^2 |\overrightarrow{PC}|^2 - (\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC})^2}}{|\overrightarrow{PB}| |\overrightarrow{PC}|}$$

なので

$$S_1 = \frac{1}{2} |\overrightarrow{PB}| |\overrightarrow{PC}| \sin \angle BPC = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{PB}|^2 |\overrightarrow{PC}|^2 - (\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC})^2}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{PB}|^2 |\overrightarrow{PC}|^2 - (\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC})^2}$$

(2)

D は辺 BC 上の点なので,  $\alpha$  を実数として

$$\overrightarrow{PD} = \alpha \overrightarrow{PB} + (1 - \alpha) \overrightarrow{PC}$$

と表せる。さらに, D は直線 AP の延長線上にあるので,  $k$  を実数として

$$\overrightarrow{PD} = k \overrightarrow{AP} \quad k \neq 0$$

と表せる。よって,

$$k \overrightarrow{AP} = \alpha \overrightarrow{PB} + (1 - \alpha) \overrightarrow{PC}$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\alpha}{k} \overrightarrow{PB} + \frac{1 - \alpha}{k} \overrightarrow{PC} \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。題意より

$$\overrightarrow{AP} = s \overrightarrow{PB} + t \overrightarrow{PC} \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立ち,  $\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}$  は互いに一次独立であるから, ①, ②を係数比較すると

$$\begin{cases} s = \frac{\alpha}{k} \\ t = \frac{1 - \alpha}{k} \end{cases}$$

よって

$$\begin{cases} k = \frac{1}{s + t} \\ \alpha = \frac{s}{s + t} \end{cases}$$

以上より,

$$\overrightarrow{PD} = \frac{s}{s + t} \overrightarrow{PB} + \frac{t}{s + t} \overrightarrow{PC}$$

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{PD} = \frac{s}{s + t} \overrightarrow{PB} + \frac{t}{s + t} \overrightarrow{PC}$$

(3)

$\triangle PBD$  と  $\triangle PDC$  の面積の比は, BD と DC の長さの比に等しい。

(2)の答より, 点 D は辺 BC を  $t:s$  に内分する点であるから

$$S_2 = \frac{t}{s + t} S_1$$

また,  $\triangle PAC$  と  $\triangle PDC$  の面積の比は AP と PD の長さの比に等しい。

$$\overrightarrow{PD} = \frac{1}{s + t} \overrightarrow{AP}$$

であるから

$$|\overrightarrow{PD}| : |\overrightarrow{AP}| = 1 : s + t$$

よって,

$$\begin{aligned} S_3 &= (s + t) \triangle PDC \\ &= s S_1 \end{aligned}$$

以上より

$$S_2 : S_3 = \frac{t}{s + t} : s = t : s \quad s + t$$

$$(\text{答}) \quad S_2 : S_3 = t : s \quad s + t$$



# 第4問

(1)

$y=x^2$  の両辺を  $x$  で微分すると  $y'=2x$  より、2 接線の方程式はそれぞれ

$$y=2\alpha x-\alpha^2, \quad y=2\beta x-\beta^2$$

と表される。よって、これらの直線の交点  $R$  の座標は

$$\begin{cases} y=2\alpha x-\alpha^2 \\ y=2\beta x-\beta^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2\alpha x-\alpha^2 \\ x=\frac{\beta^2-\alpha^2}{2\beta-\alpha} \end{cases}$$

$$\therefore x, y = \left( \frac{\alpha+\beta}{2}, \alpha\beta \right)$$

となる。

$$(\text{答}) \left( \frac{\alpha+\beta}{2}, \alpha\beta \right)$$

(2)

点  $P$  と  $x$  軸との距離は  $\alpha^2$ 、点  $Q$  と  $x$  軸との距離は  $\beta^2$  なので、

$$\alpha^2 + \beta^2 = 4$$

$$\alpha + \beta^2 - 2\alpha\beta = 4 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成立する。

$$\begin{cases} X = \frac{\alpha+\beta}{2} \\ Y = \alpha\beta \end{cases}$$

とおき、 $\textcircled{1}$ に代入すると

$$2X^2 - 2Y = 4$$

$$Y = 2X^2 - 2$$

ここで、

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2X \\ \alpha\beta = Y \end{cases}$$

より  $\alpha, \beta$  を解に持つ二次方程式の一つは、

$$t^2 - 2Xt + Y = 0$$

$\alpha, \beta$  は相異なる 2 実数なので、この二次方程式の判別式を  $D$  とすると、

$$\frac{D}{4} = X^2 - Y > 0$$

$$\therefore Y < X^2$$

したがって、求める軌跡は

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 2 \\ y < x^2 \end{cases}$$

をともに満たす部分で、これは

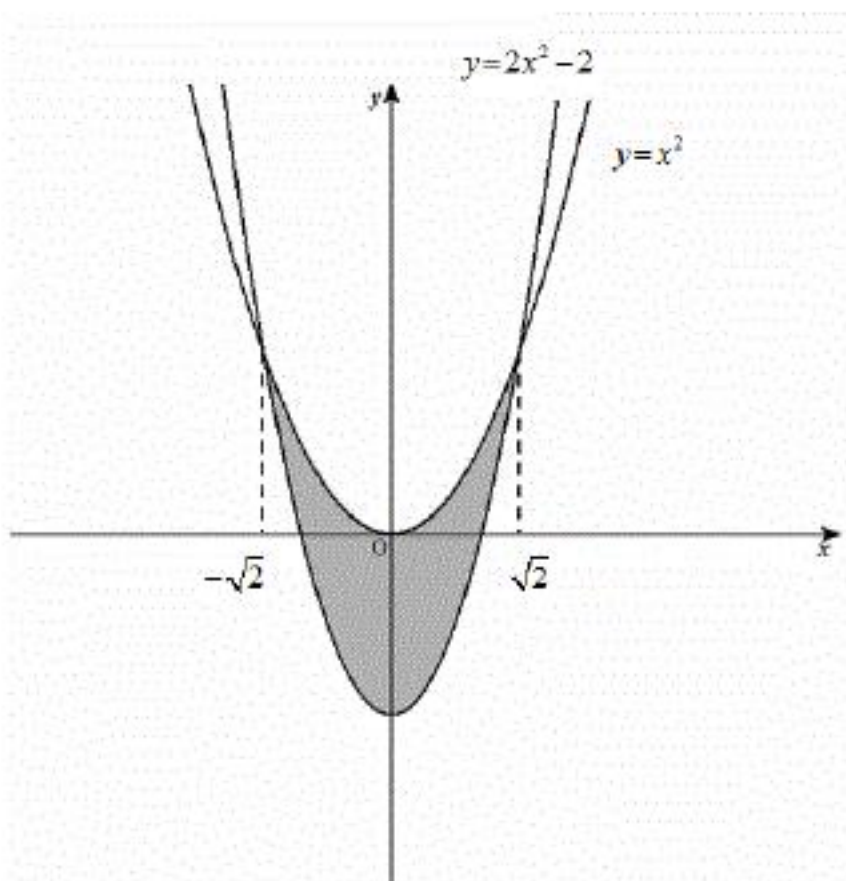
$$2x^2 - 2 < x^2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$$

より、 $y=2x^2-2$  の  $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$  の部分である。

$$(\text{答}) \quad y=2x^2-2 \quad -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$$

(3)

求めるのは次図の灰色の部分の面積である。



この面積は、

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \{x^2 - (2x^2 - 2)\} dx &= \left[ 2x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{8\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{8\sqrt{2}}{3}$$