

第1問

(1)

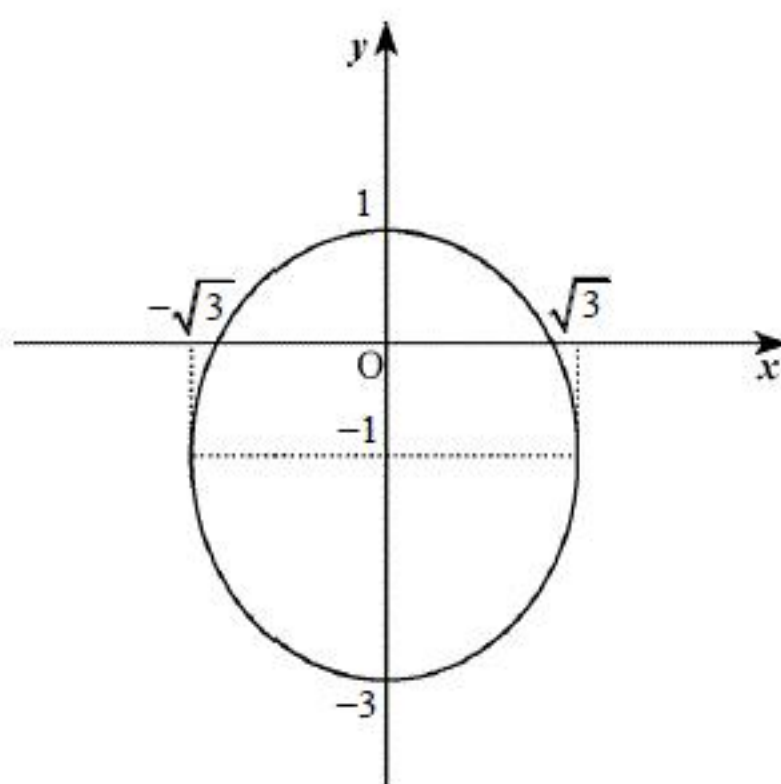
極座標 (r, θ) と直交座標 (x, y) は関係式 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ を満たすから、

$$\begin{aligned} r &= \frac{3}{2 + \sin \theta} \\ \Leftrightarrow r(2 + \sin \theta) &= 3 \quad (\because -1 \leq \sin \theta \leq 1) \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 + y^2} &= 3 - y \end{aligned}$$

と変形できる。ここで $3 - y < 0$ のとき、上式を満たす実数の組 (x, y) は存在せず、 $3 - y \geq 0$ のもとで、

$$\begin{aligned} \left(2\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 &= (3 - y)^2 \\ \Leftrightarrow 4x^2 + 3y^2 + 6y - 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x^2}{3} + \frac{(y+1)^2}{4} &= 1 \end{aligned}$$

と同値変形できる。また、上式を満たす実数の組 (x, y) は $3 - y \geq 0$ を満たす。よって、曲線 C の概形は以下ようになる。



(答) 方程式: $\frac{x^2}{3} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$, 概形: 前図

(2)

(1) の結果に $y=0$ を代入して、

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{3} + \frac{1}{4} &= 1 \\ \therefore x &= \pm \frac{3}{2} \end{aligned}$$

よって P の座標は $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ である。 $4x^2 + 3(y+1)^2 = 12$ の両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned} 8x + 6(y+1) \frac{dy}{dx} &= 0 \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= -\frac{4x}{3(y+1)} \end{aligned}$$

であるので、 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ を代入して接線の傾きを求めると、

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4 \times \frac{3}{2}}{3(0+1)} = -2$$

よって、求める接線は

$$y = -2\left(x - \frac{3}{2}\right) + 0 = -2x + 3$$

(答) $y = -2x + 3$

(3)

C の第1象限の式は $x \geq 0, y \geq 0$ より、

$$\begin{aligned} 4x^2 + 3(y+1)^2 &= 12 \\ \sqrt{3}(y+1) &= \sqrt{12 - 4x^2} \\ \therefore y &= \sqrt{\frac{12 - 4x^2}{3}} - 1 \end{aligned}$$

よって、求める面積は $\int_0^{\frac{3}{2}} \left\{ \sqrt{\frac{12 - 4x^2}{3}} - 1 \right\} dx$ で求められる。

ここで $x = \sqrt{3} \sin \theta$ とおくと、 $x: 0 \rightarrow \frac{3}{2}$ のとき、 $\theta: 0 \rightarrow \frac{1}{3}\pi$, $\frac{dx}{d\theta} = \sqrt{3} \cos \theta$ より、

$$\begin{aligned} &\int_0^{\frac{1}{3}\pi} \sqrt{\frac{12 - 12 \sin^2 \theta}{3}} \sqrt{3} \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{1}{3}\pi} (2 \cos \theta - 1) \sqrt{3} \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{1}{3}\pi} (2\sqrt{3} \cos^2 \theta - \sqrt{3} \cos \theta) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{1}{3}\pi} (\sqrt{3} \cos 2\theta + \sqrt{3} - \sqrt{3} \cos \theta) d\theta \\ &= \sqrt{3} \left[\frac{1}{2} \sin 2\theta + \theta - \sin \theta \right]_0^{\frac{1}{3}\pi} \\ &= \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\pi - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

(答) $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi - \frac{3}{4}$

第2問

(1)

A が 3 勝 k 敗となるのは $3+k$ 回勝負をして 3 回勝つときなので、 $3+k$ 回中何回目に勝つかを考えればよい。

$$R_0: {}_3C_0=1$$

$$R_1: {}_4C_3=4$$

$$R_2: {}_5C_3=10$$

$$D_3: {}_6C_3=20$$

以上から $R_0: 1$ 通り、 $R_1: 4$ 通り、 $R_2: 10$ 通り、 $D_3: 20$ 通り

(答) $R_0: 1$ 通り、 $R_1: 4$ 通り、 $R_2: 10$ 通り、 $D_3: 20$ 通り

(2)

R_k ($k=0, 1, 2$) となる確率を r_k とすると、

$$r_0 = 1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

$$r_1 = 4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{32}{81}$$

$$r_2 = 10 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{80}{243}$$

4 勝 k 敗で A が勝つ確率 a_k は $\frac{2}{3}r_k$ で表されるので

$$a_0 = \frac{2}{3} \times \frac{8}{27} = \frac{16}{81}$$

$$a_1 = \frac{2}{3} \times \frac{32}{81} = \frac{64}{243}$$

$$a_2 = \frac{2}{3} \times \frac{80}{243} = \frac{160}{729}$$

(答) $\frac{16}{81}, \frac{64}{243}, \frac{160}{729}$ (順に $k=0, 1, 2$ のとき)

(3)

D_n の状態から次の 2 戦で勝負が決まるとすると、A の優勝する確率は

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

B の優勝する確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

であり、勝負が決まらない確率は、

$$1 - \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

これは $n \geq 3$ の全ての n でいえるので、 D_3 になった時点で A の優勝する確率は、無限級数を考えて、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} \times \frac{4}{9} &= \frac{4}{9} \times \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

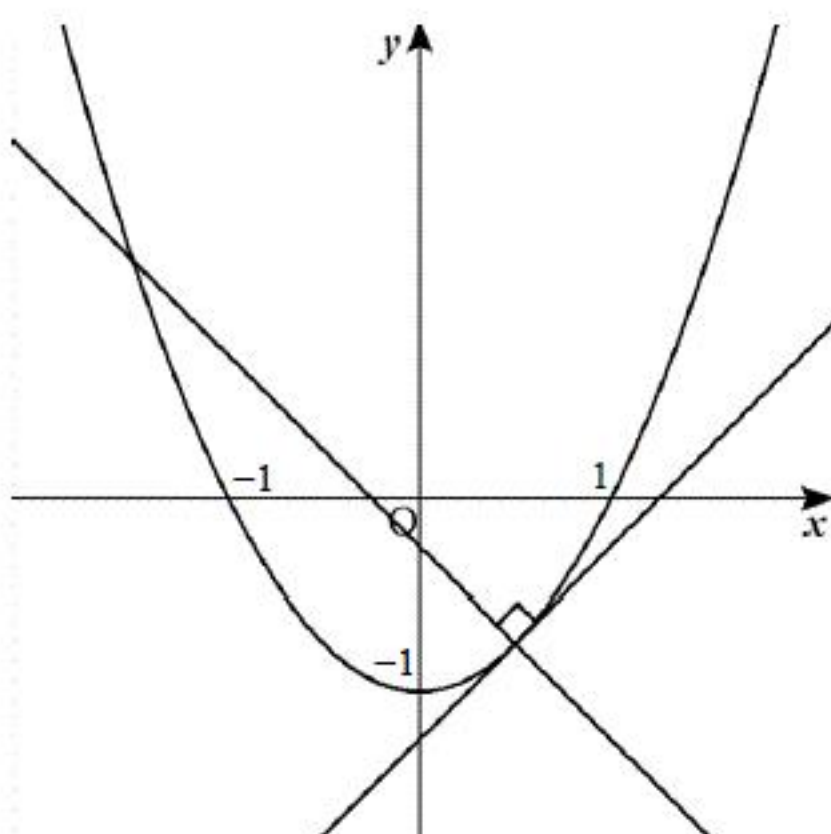
以上から、A の優勝する確率は

$$\frac{16}{81} + \frac{64}{243} + \frac{160}{729} + \frac{4}{5} \times 20 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{208}{243}$$

(答) $\frac{208}{243}$

第3問

(1)



$y=f(x)=x^2-1$ とおくと、 $t \neq 0$ のとき求める法線は

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{f'(t)}(x-t)+t^2-1 \\ &= -\frac{1}{2t}x+t^2-\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$t=0$ のとき、 $(0, -1)$ における接線は y 軸に平行なので、この点における法線は $x=0$

(答) $t \neq 0$ のとき $y = -\frac{1}{2t}x+t^2-\frac{1}{2}$, $t=0$ のとき $x=0$

(2)

$P(p, p^2)$ とおく。

[1] $t \neq 0$ のとき

$y = -\frac{1}{2t}x+t^2-\frac{1}{2}$ が $P(p, p^2)$ を通るので

$$p^2 = -\frac{1}{2t}p+t^2-\frac{1}{2}$$

$$\therefore 2t^3 - (2p^2+1)t - p = 0$$

ここで、点 P を通る C の法線がちょうど2つ存在することは、この t の3次方程式が異なる2つの実数解を持つことと同じである。この式をさらに変形して、

$$2(t+p)\left(t^2-pt-\frac{1}{2}\right)=0$$

したがってこの方程式がちょうど2つの異なる実数解を持つのは次の場合である。

(i) $t^2-pt-\frac{1}{2}=0$ が $t=-p$ 以外の重解を持つとき

判別式を D とすると、重解を持つことから

$$D=p^2+2=0$$

しかし、これを満たす実数 p は存在しない。

(ii) $t^2-pt-\frac{1}{2}=0$ が $t=-p$ とそれ以外の実数解を持つとき

判別式を D とすると、異なる2実解を持つことから

$$D=p^2+2>0$$

これは常に成り立つ。また、この方程式が $t=-p$ を解に持つことから、

$$(-p)^2 - p(-p) - \frac{1}{2} = 0$$

$$\therefore p = \pm \frac{1}{2}$$

よって $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ が条件を満たす。

[2] $t=0$ のとき

C の法線 $x=0$ は $y=x^2$ と $(0, 0)$ において交わる。よって、 $(0, 0)$ を通る法線がこの他にちょうど1つ存在すればよい。 $A(q, q^2-1)$ ($q \neq 0$) における法線は

$$y = -\frac{1}{2q}x+q^2-\frac{1}{2}$$

と表される。これが $(0, 0)$ を通るとすると、

$$0 = q^2 - \frac{1}{2}$$

$$\therefore q = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

となるが、これでは $x=0$ 以外に条件を満たす法線が2つ存在してしまうことになる。したがってこれは不適である。

以上 [1], [2] より、点 P の座標は

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

(答) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

第4問

(1)

$4X^2 + Y^{-1}AX = 3E$ を変形して,

$$X^2 = \frac{3E - Y^{-1}AX}{4}$$

これを $X^{-1}YX^2 - 2X^{-1}Y = E$ に代入して

$$X^{-1}Y \frac{3E - Y^{-1}AX}{4} - 2X^{-1}Y = E$$

これに左から X , 右から X^{-1} をかけて整理すると,

$$Y \frac{3E - Y^{-1}AX}{4} X^{-1} - 2YX^{-1} = E$$

$$\therefore -\frac{5}{4}YX^{-1} = E + \frac{1}{4}A$$

$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であるから,

$$-\frac{5}{4}YX^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\therefore YX^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(\text{答}) YX^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(2)

$YX^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ の両辺に右から X をかけて,

$$Y = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} X$$

また $X^{-1}YX^2 - 2X^{-1}Y = E$ の両辺に左から X , 右から X^{-1} をかけると,

$$YX - 2YX^{-1} = E$$

これに $Y = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} X$ を代入すると,

$$-\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} X^2 + \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} X^2 = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore X^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3 \cdot 4 - 3 \cdot 0} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & 15 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

ここで $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とおくと,

$$\begin{pmatrix} x^2 + yz & xy + yw \\ xz + zw & yz + w^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{5}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} x^2 + yz = \frac{1}{3} & \dots \textcircled{1} \\ y(x+w) = \frac{5}{4} & \dots \textcircled{2} \\ z(x+w) = 0 & \dots \textcircled{3} \\ yz + w^2 = \frac{3}{4} & \dots \textcircled{4} \end{cases}$$

この連立方程式を解く。③より

$$z = 0 \text{ または } x + w = 0$$

であるが, $x + w = 0$ では②が成立しないから, $z = 0$ である。よって①, ④より

$$x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}, w = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (複号任意)}$$

であることがわかる。したがって, ②に代入することで

$$(x, w, y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{5\sqrt{3}}{2} \right), \\ \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2} \right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

となることがわかる。以上より, この連立方程式の解は

$$(x, y, z, w) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{5\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right), \\ \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{5\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

であるから, 求める行列 X は,

$$X = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{5\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{5\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \\ (\text{答}) X = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{5\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{5\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$