

第1問

(1)

$y = x^2$ の両辺を x で微分すると $y' = 2x$ より, 2 接線の方程式はそれぞれ

$$y = 2\alpha x - \alpha^2, \quad y = 2\beta x - \beta^2$$

と表される。ここで, $\alpha = \beta$ であることから

$$\begin{cases} y = 2\alpha x - \alpha^2 \\ y = 2\beta x - \beta^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2\alpha - 2\beta)x = \alpha^2 - \beta^2 \\ y = 2\alpha x - \alpha^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\alpha + \beta}{2} \\ y = \alpha\beta \end{cases}$$

となる。よって, これらの直線の交点 R の座標は

$$\left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \alpha\beta \right)$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \alpha\beta \right)$$

(2)

点 P と x 軸との距離は α^2 , 点 Q と x 軸との距離は β^2 なので,

$$\alpha^2 + \beta^2 = 4$$

$$(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 4 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成立する。

$$\begin{cases} X = \frac{\alpha + \beta}{2} \\ Y = \alpha\beta \end{cases}$$

とおき, ①に代入すると

$$(2X)^2 - 2Y = 4$$

$$Y = 2X^2 - 2$$

ここで,

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2X \\ \alpha\beta = Y \end{cases}$$

より α, β を解に持つ二次方程式の一つは,

$$t^2 - 2Xt + Y = 0$$

α, β は相異なる 2 実数なので, この二次方程式の判別式を D とすると,

$$D/4 = X^2 - Y > 0$$

$$\therefore Y < X^2$$

したがって, 求める軌跡は

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 2 \\ y < x^2 \end{cases}$$

をともに満たす部分で, これは

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 2 \\ y < x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x^2 - 2 \\ 2x^2 - 2 < x^2 \end{cases}$$

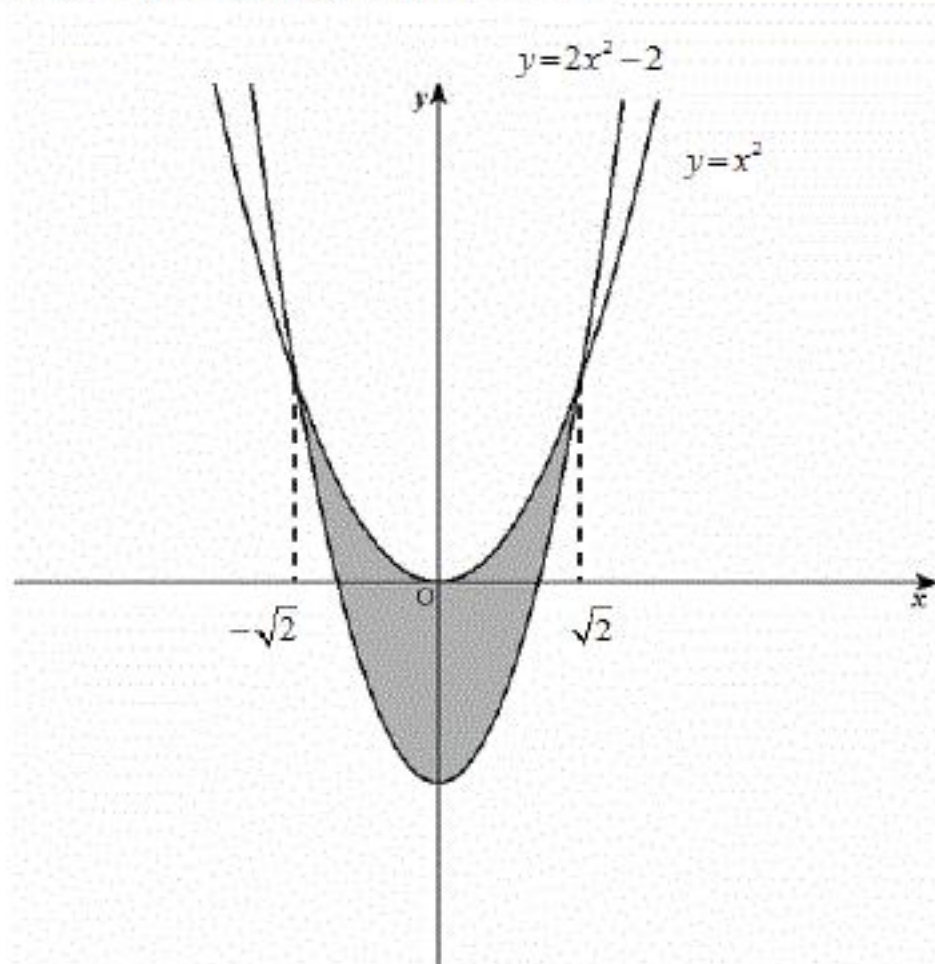
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x^2 - 2 \\ -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \end{cases}$$

と変形できるから, $y = 2x^2 - 2$ の $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ の部分である。

$$(\text{答}) \quad y = 2x^2 - 2 \quad (-\sqrt{2} < x < \sqrt{2})$$

(3)

求めるのは次図の灰色の部分の面積である。



この面積は,

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \{ x^2 - (2x^2 - 2) \} dx &= \left[2x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{8\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

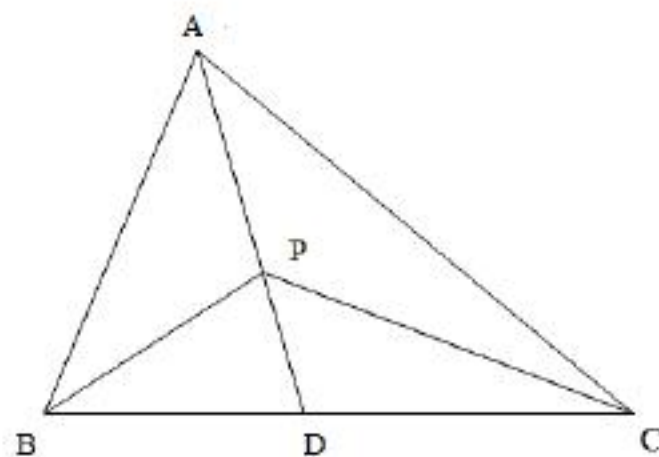
第2問

(1)

$$\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = |\overrightarrow{PB}| |\overrightarrow{PC}| \cos \angle BPC$$

より

$$\cos \angle BPC = \frac{\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PB}| |\overrightarrow{PC}|}$$



$0 < \angle BPC < \pi$ より,

$$\sin \angle BPC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle BPC} = \frac{\sqrt{|\overrightarrow{PB}|^2 |\overrightarrow{PC}|^2 - (\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC})^2}}{|\overrightarrow{PB}| |\overrightarrow{PC}|}$$

なので

$$S_1 = \frac{1}{2} |\overrightarrow{PB}| |\overrightarrow{PC}| \sin \angle BPC = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{PB}|^2 |\overrightarrow{PC}|^2 - (\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC})^2}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{PB}|^2 |\overrightarrow{PC}|^2 - (\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC})^2}$$

(2)

D は辺 BC 上の点なので, α を実数として

$$\overrightarrow{PD} = \alpha \overrightarrow{PB} + (1 - \alpha) \overrightarrow{PC}$$

と表せる。さらに, D は直線 AP の延長線上にあるので, k を実数として

$$\overrightarrow{PD} = k \overrightarrow{AP} \quad (k \neq 0)$$

と表せる。よって,

$$k \overrightarrow{AP} = \alpha \overrightarrow{PB} + (1 - \alpha) \overrightarrow{PC}$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\alpha}{k} \overrightarrow{PB} + \frac{1 - \alpha}{k} \overrightarrow{PC} \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。題意より

$$\overrightarrow{AP} = s \overrightarrow{PB} + t \overrightarrow{PC} \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立ち, $\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}$ は互いに一次独立であるから, ①, ②を係数比較すると

$$\begin{cases} s = \frac{\alpha}{k} \\ t = \frac{1 - \alpha}{k} \end{cases}$$

よって

$$\begin{cases} k = \frac{1}{s + t} \\ \alpha = \frac{s}{s + t} \end{cases}$$

以上より,

$$\overrightarrow{PD} = \frac{s}{s + t} \overrightarrow{PB} + \frac{t}{s + t} \overrightarrow{PC}$$

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{PD} = \frac{s}{s + t} \overrightarrow{PB} + \frac{t}{s + t} \overrightarrow{PC}$$

(3)

$\triangle PBD$ と $\triangle PDC$ の面積の比は, BD と DC の長さの比に等しい。

(2)の答より, 点 D は辺 BC を $t:s$ に内分する点であるから

$$S_2 = \frac{t}{s + t} S_1$$

また, $\triangle PAC$ と $\triangle PDC$ の面積の比は AP と PD の長さの比に等しい。

$$\overrightarrow{PD} = \frac{1}{s + t} \overrightarrow{AP}$$

であるから

$$|\overrightarrow{PD}| : |\overrightarrow{AP}| = 1 : s + t$$

よって,

$$\begin{aligned} S_3 &= (s + t) \triangle PDC \\ &= s S_1 \end{aligned}$$

以上より

$$S_2 : S_3 = \frac{t}{s + t} : s = t : s(s + t)$$

$$(\text{答}) \quad S_2 : S_3 = t : s(s + t)$$

第3問

(1)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$$

$$(\text{答}) \quad \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$$

(2)

$$A^2 + pA + qE = O$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 5 & 11 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = O$$

$$\begin{pmatrix} 6+2p+q & 10+2p \\ 5+p & 11+3p+q \end{pmatrix} = O$$

よって,

$$\begin{cases} 6+2p+q=0 \\ 10+2p=0 \\ 5+p=0 \\ 11+3p+q=0 \end{cases}$$

これを解くと,

$$\begin{cases} p=-5 \\ q=4 \end{cases}$$

$$(\text{答}) \quad p=-5, \quad q=4$$

(3)

$$A^2 - 5A + 4E = O$$

の両辺に, 右から A^{n-1} ($n=1$ のときは $A^0 = E$ とする) をかけて

$$A^{n+1} - 5A^n + 4A^{n-1} = O$$

変形して

$$A^{n+2} - A^{n+1} = 4(A^{n+1} - A^n)$$

この漸化式を繰り返し用いると,

$$A^n - A^{n-1} = 4^{n-1} (A^1 - A^0) = 4^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (n \geq 1)$$

$$(\text{答}) \quad A^n - A^{n-1} = 4^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(4)

(3)で得られた漸化式を用いると, $n \geq 1$ において

$$\begin{aligned} A^n &= A^0 + \sum_{k=1}^n 4^{k-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{4^n - 1}{4 - 1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{3}(4^n - 1) & \frac{2}{3}(4^n - 1) \\ \frac{1}{3}(4^n - 1) & 1 + \frac{2}{3}(4^n - 1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{3}(4^n - 1) & \frac{2}{3}(4^n - 1) \\ \frac{1}{3}(4^n - 1) & 1 + \frac{2}{3}(4^n - 1) \end{pmatrix}$$

第4問

(1)

$$\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4}$$

より,

$$\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

のとき最大値 $\sqrt{2}$ をとる。

(答) $\sqrt{2}$

(2)

$$x \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{x^2 + 1} \sin(\theta + \alpha)$$

ここで, α は

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 0 \\ \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0 \end{cases}$$

を満たす角である。 $\left(0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2} \right)$

$$\alpha \leq \theta + \alpha \leq \frac{\pi}{2} + \alpha$$

より,

$$\theta + \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ のとき最大値 } \sqrt{x^2 + 1} \text{ をとる。}$$

(答) $\sqrt{x^2 + 1}$

(3)

$y = f(x)$ と $y = a(x+1)$ が共有点をもつとは, $\sqrt{x^2 + 1} = a(x+1)$ が $x \geq 0$ の範囲に解をもつことである。 $x \geq 0$ の下では

$$\sqrt{x^2 + 1} = a(x+1)$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x+1}$$

であるため, 直線 $y = a$ と曲線 $y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x+1}$ が $x \geq 0$ の範囲で共有点を持つような実数 a の最大値・最小値を求めれば良い。

$$g(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x+1} \quad (x \geq 0) \text{ とおくと,}$$

$$g'(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2 \sqrt{x^2 + 1}}$$

また,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{1 + \frac{1}{x}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

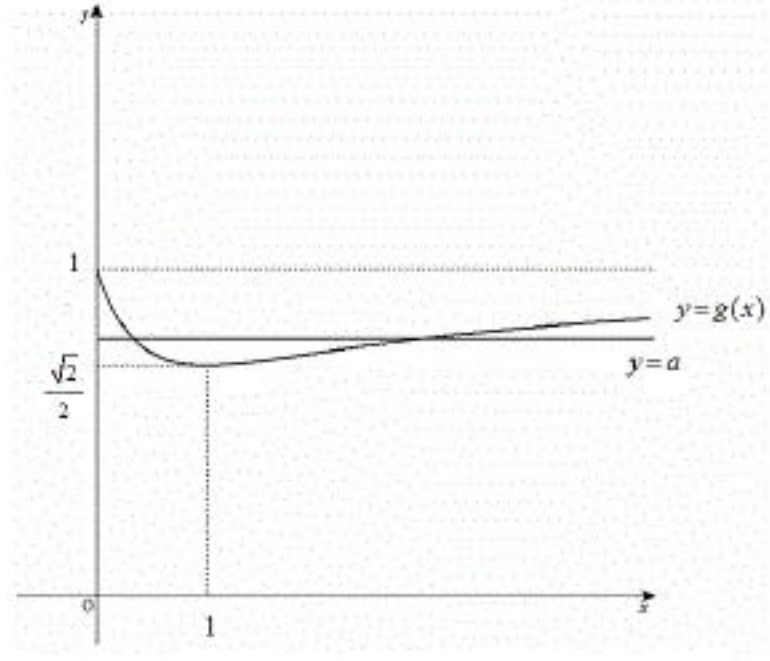
より, 次の増減表を得る。

x	0	...	1	...	(∞)
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	(1)

増減表より, グラフは次のようになる。

グラフより,

$$M=1, m=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

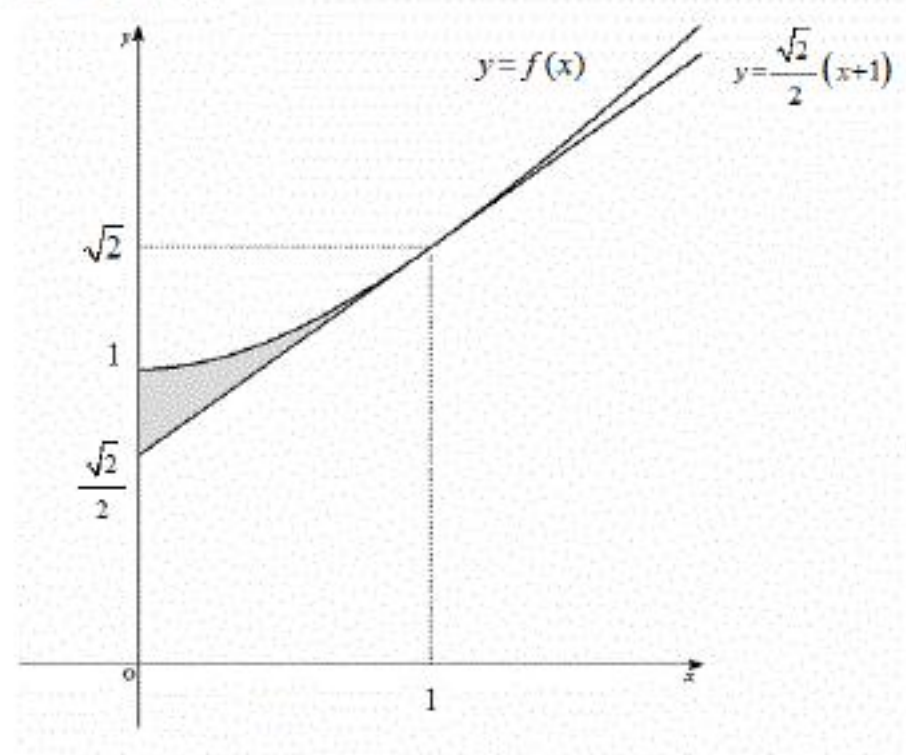


(答) $M=1, m=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(4)

曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+1)$ のグラフを描くと次のようになる。

(灰色部は回転させる部分)



$$y = f(x) \Leftrightarrow x = \sqrt{y^2 - 1} \quad (y > 0), \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+1) \Leftrightarrow x = \sqrt{2}y - 1$$

より, 求める体積は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} (\sqrt{2}y - 1)^2 dy - \pi \int_1^{\sqrt{2}} (y^2 - 1) dy \\ &= \pi \left[\frac{1}{3\sqrt{2}} (\sqrt{2}y - 1)^3 \right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} - \pi \left[\frac{y^3}{3} - y \right]_1^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{3\sqrt{2} - 4}{6} \pi \end{aligned}$$

(答) $\frac{3\sqrt{2} - 4}{6} \pi$