

第1問

(1)

C_2 の方程式は

$$y = \sqrt{1-x^2} \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

であるから,

$$\frac{2}{3}x^2 = \sqrt{1-x^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{9}x^4 = 1-x^2$$

$$\Leftrightarrow (4x^2-3)(x^2+3)=0$$

より,

$$x^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

を得る。これはともに x の定義域を満たす。よって, P, Q の座標は

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

(2)

P の x 座標が Q の x 座標より小さいとしても一般性を失わない。直線 PQ と y 軸との交点を R とおくと, $\triangle OQR$ は $\angle QOR = 60^\circ$ の直角三角形であり, 同様に $\triangle OPR$ も $\angle POR = 60^\circ$ の直角三角形である。

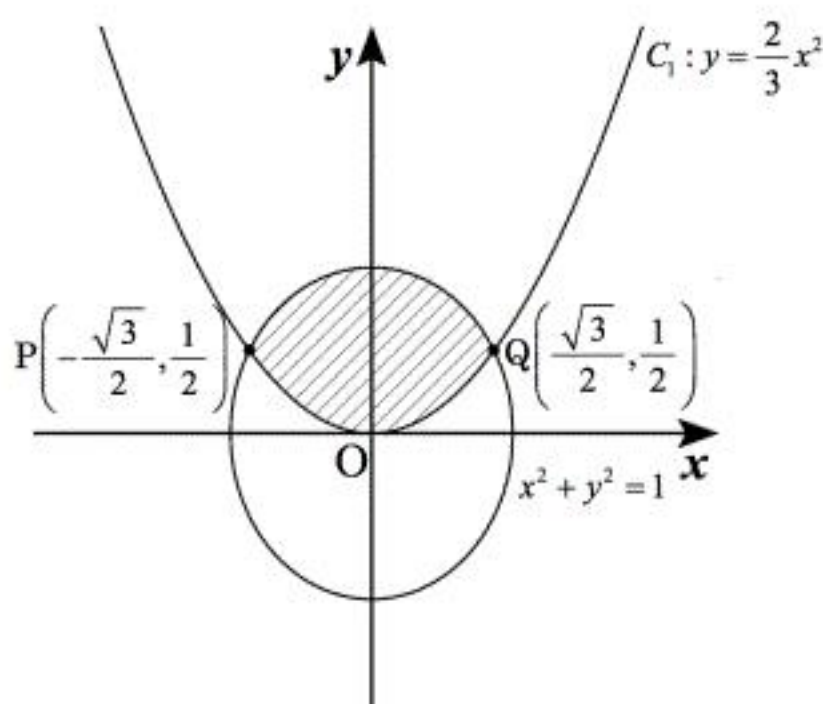
よって, 扇形 OPQ は中心角が 120° であるから, その面積は,

$$1^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{3} = \frac{\pi}{3}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\pi}{3}$$

(3)



上図の斜線部の面積が求める面積である。

$$\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{3}x^2 \right) dx = 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2} dx - 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{2}{3}x^2$$

ここで, $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2} dx$ において $x = \sin \theta$ とおくと, $dx = \cos \theta d\theta$ であり,

x	$0 \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{3}$

より,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1-\sin^2 \theta} \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{4\pi+3\sqrt{3}}{24} \end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2} dx - 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{2}{3}x^2 &= \frac{4\pi+3\sqrt{3}}{12} - \left[\frac{4}{9}x^3 \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{4\pi+\sqrt{3}}{12} \end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad \frac{4\pi+\sqrt{3}}{12}$$

第2問

(1)

$f'(x)=12x^3+3ax^2+2bx+c, \quad f''(x)=36x^2+6ax+2b$

より,

$f(1)=a+b+c+d+3=0 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$

$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{27}a+\frac{1}{9}b+\frac{1}{3}c+d+\frac{1}{27}=-\frac{16}{27} \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}$

$f''(1)=6a+2b+36=0 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{3}$

$f''\left(\frac{1}{3}\right)=2a+2b+4=0 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{4}$

を得る。③, ④を連立して,

$a=-8, \quad b=6$

を得る。これらを①, ②に代入し整理すると,

$c+d=-1 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{5}$

$c+3d=-3 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{6}$

より, ⑤, ⑥を連立して,

$c=0, \quad d=-1$

を得る。

(答) $a=-8, \quad b=6, \quad c=0, \quad d=-1$

(2)

$f(x)=3x^4-8x^3+6x^2-1$

であるから,

$f'(x)=12x^3-24x^2+12x$
 $\qquad \qquad \qquad =12x(x-1)^2$

$f''(x)=36x^2-48x+12$
 $\qquad \qquad \qquad =12(3x-1)(x-1)$

となる。これより, 以下の増減表を得る。

x	...	0	...	$\frac{1}{3}$	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	+	+	0	+
$f''(x)$	+	+	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-\frac{16}{27}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

よって,

$x<0$ で減少

$x\geq 0$ で増加

極小値: -1

極大値: なし

$x<\frac{1}{3}, \quad x\geq 1$ で下に凸

$\frac{1}{3}\leq x<1$ で上に凸

$x<0$ で減少

$x\geq 0$ で増加

極小値: -1

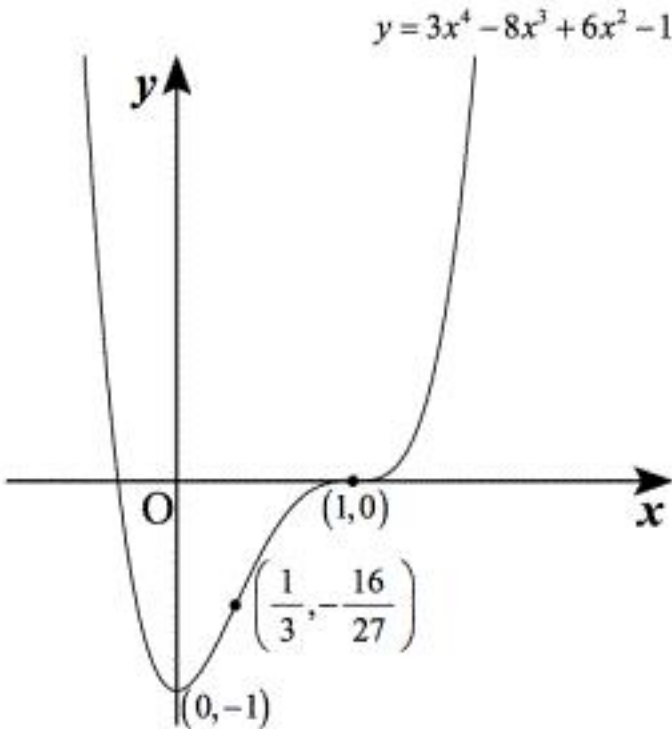
極大値: なし

(答)

$x<\frac{1}{3}, \quad x\geq 1$ で下に凸

$\frac{1}{3}\leq x<1$ で上に凸

(3)



第3問

(1)

△ABC に余弦定理を適用して、

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{CA^2 + BC^2 - AB^2}{2 \cdot CA \cdot BC} \\ &= \frac{6^2 + 10^2 - 11^2}{2 \cdot 6 \cdot 10} \\ &= \frac{1}{8}\end{aligned}$$

を得る。同様に△ACD に余弦定理を適用して、

$$\begin{aligned}\cos \beta &= \frac{CA^2 + CD^2 - AD^2}{2 \cdot CA \cdot CD} \\ &= \frac{6^2 + 5^2 - 4^2}{2 \cdot 6 \cdot 5} \\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

を得る。よって、

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{64}} \\ &= \frac{3\sqrt{7}}{8}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin \beta &= \sqrt{1 - \cos^2 \beta} \\ &= \sqrt{1 - \frac{9}{16}} \\ &= \frac{\sqrt{7}}{4}\end{aligned}$$

$$(答) \quad \cos \alpha = \frac{1}{8}, \quad \sin \alpha = \frac{3\sqrt{7}}{8}, \quad \cos \beta = \frac{3}{4}, \quad \sin \beta = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

(2)

加法定理より、

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{4} - \frac{3\sqrt{7}}{8} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} \\ &= -\frac{9}{16}\end{aligned}$$

を得る。△BCD に余弦定理を適用して

$$\begin{aligned}BD^2 &= BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cos(\alpha + \beta) \\ &= 100 + 25 - 100 \cdot \left(-\frac{9}{16}\right) \\ &= \frac{725}{4}\end{aligned}$$

よって、

$$BD = \frac{5\sqrt{29}}{2}$$

$$(答) \quad BD = \frac{5\sqrt{29}}{2}$$

(3)

△BCD に余弦定理を適用して、

$$\begin{aligned}\cos \angle DBC &= \frac{BC^2 + BD^2 - CD^2}{2BC \cdot BD} \\ &= \frac{100 + \frac{725}{4} - 25}{50\sqrt{29}} \\ &= \frac{41}{8\sqrt{29}}\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}\sin \angle DBC &= \sqrt{1 - \left(\frac{41}{8\sqrt{29}}\right)^2} \\ &= \frac{5}{8} \sqrt{\frac{7}{29}}\end{aligned}$$

を得る。よって、△BCE に正弦定理を適用して、

$$\begin{aligned}\frac{CE}{\sin \angle DBC} &= \frac{10}{\sin(180 - \alpha - \angle DBC)} \\ \Leftrightarrow CE &= \frac{10 \sin \angle DBC}{\sin(\alpha + \angle DBC)} \\ \Leftrightarrow CE &= \frac{10 \sin \angle DBC}{\sin \alpha \cos \angle DBC + \cos \alpha \sin \angle DBC} \\ \Leftrightarrow CE &= \frac{\frac{25}{4}}{\frac{3}{8} \cdot \frac{41}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{8}} \\ \Leftrightarrow CE &= \frac{25}{8}\end{aligned}$$

を得る。

$$(答) \quad CE = \frac{25}{8}$$

第4問

(1)

命題「 $n=1, 2, 3, \dots$ で $a_n > 1$ である」ことを数学的帰納法で証明する。

[1] $n=1$ のとき

$$a_1 = 2$$

より命題が成り立つ。

[2] $n=k$ ($k \geq 1$) で命題の成立を仮定すると、

$$a_k > 1$$

が成り立つので、

$$a_{k+1} = \frac{a_k + 2}{a_k + 1} = 1 + \frac{1}{a_k + 1} > 1$$

となる。よって、 $n=k+1$ においても命題が成立する

以上[1], [2]から数学的帰納法により、命題が真であることが示された。

(証明完了)

(2)

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \sqrt{2} &= \frac{a_n + 2}{a_n + 1} - \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow a_{n+1} - \sqrt{2} &= \frac{(1 - \sqrt{2})a_n + 2 - \sqrt{2}}{a_n + 1} \\ \Leftrightarrow a_{n+1} - \sqrt{2} &= \frac{1 - \sqrt{2}}{a_n + 1} (a_n - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

と式変形をする。これより、

$$\begin{aligned} |a_{n+1} - \sqrt{2}| &= \left| \frac{1 - \sqrt{2}}{a_n + 1} (a_n - \sqrt{2}) \right| \\ &= \frac{\sqrt{2} - 1}{a_n + 1} |a_n - \sqrt{2}| \end{aligned}$$

ここで、(1)より $a_n > 1$ なので、

$$\frac{\sqrt{2} - 1}{a_n + 1} |a_n - \sqrt{2}| < \frac{\sqrt{2} - 1}{2} |a_n - \sqrt{2}|$$

が成り立つ。よって

$$\frac{\sqrt{2} - 1}{a_n + 1} |a_n - \sqrt{2}| \leq \frac{\sqrt{2} - 1}{2} |a_n - \sqrt{2}|$$

も成り立つので、

$$|a_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{\sqrt{2} - 1}{2} |a_n - \sqrt{2}|$$

が成立する。

(証明完了)

(3)

(2)で示した不等式より、

$$|a_n - \sqrt{2}| \leq \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{2} \right)^{n-1} |a_1 - \sqrt{2}|$$

となる。

$$0 < \frac{\sqrt{2} - 1}{2} < 1$$

なので、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{2} \right)^{n-1} = 0$$

となる。よって、はさみうちの定理より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - \sqrt{2}| = 0$$

を得る。これより、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{2}$$

となる。

(答) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{2}$