

第 1 問

(1)

$$f(x) = x - \log x$$

とおく。

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

より、増減表は次のようになる。

x	0	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$

これより、

$$f(x) = x - \log x \geq 1$$

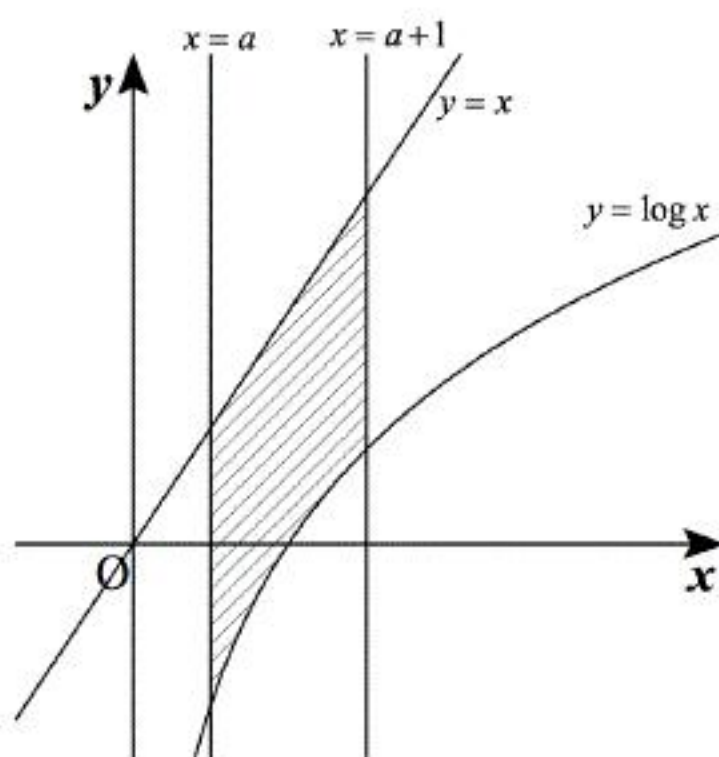
であるから、

$$x \geq \log x + 1 > \log x$$

が成立する。

(証明完了)

(2)



上図の斜線部の面積が求める面積であるから、

$$\begin{aligned} S &= \int_a^{a+1} (x - \log x) dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x^2 - x \log x + x \right]_a^{a+1} \\ &= \frac{2a+3}{2} + a \log a - (a+1) \log (a+1) \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad S = \frac{2a+3}{2} + a \log a - (a+1) \log (a+1)$$

(3)

$$\begin{aligned} \frac{dS}{da} &= 1 + \log a + 1 - \log (a+1) - 1 \\ &= 1 + \log \frac{a}{a+1} \\ &= \log \frac{ea}{a+1} \end{aligned}$$

より、増減表は次のようになる。

a	0	...	$\frac{1}{e-1}$	...
$\frac{dS}{da}$		-	0	+
S		$\searrow$	最小	$\nearrow$

よって、 S が最小値をとるのは

$$a = \frac{1}{e-1}$$

のときであり、その値は

$$\begin{aligned} &\frac{2 \cdot \frac{1}{e-1} + 3}{2} - \left(\frac{1}{e-1} + 1 \right) \log \left(\frac{1}{e-1} + 1 \right) + \frac{1}{e-1} \log \frac{1}{e-1} \\ &= \frac{1}{2} + \log (e-1) \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2} + \log (e-1)$$

第2問

(1)

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(a_1 + \frac{3}{a_1} \right) = 2$$

であり,

$$\frac{3}{2} < \sqrt{3} < 2$$

であるから,

$$0 < a_2 - \sqrt{3} < \frac{1}{2}$$

である。

(証明完了)

(2)

n が2以上の自然数であるとき, 不等式

$$0 < a_n - \sqrt{3} < \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

が成り立つことを, 数学的帰納法を用いて証明する。

[1] $n=2$ のとき

(1)より, 命題は成立している。

[2] $n=k$ ($k \geq 2$)で命題の成立を仮定すると,

$$0 < a_k - \sqrt{3} < \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1}$$

であり, 特にこの左側の不等式を変形すると,

$$\frac{3}{a_k} < \frac{3}{\sqrt{3}}$$

となる。また, 右側の不等式を変形して

$$a_k < \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1} + \sqrt{3}$$

となる。よって,

$$a_k + \frac{3}{a_k} < \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1} + \sqrt{3} + \frac{3}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1} + 2\sqrt{3}$$

であるから,

$$\begin{aligned} a_{k+1} - \sqrt{3} &= \frac{1}{2} \left(a_k + \frac{3}{a_k} \right) - \sqrt{3} \\ &< \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1} + 2\sqrt{3} \right\} - \sqrt{3} \\ &= \left(\frac{1}{2} \right)^k \end{aligned}$$

であることが示される。また,

$$\begin{aligned} a_{k+1} - \sqrt{3} &= \frac{1}{2} \left(a_k + \frac{3}{a_k} \right) - \sqrt{3} \\ &= \frac{a_k^2 - 2\sqrt{3}a_k + 3}{2a_k} \\ &= \frac{(a_k - \sqrt{3})^2}{2a_k} \end{aligned}$$

であり, 仮定から $a_k > \sqrt{3}$ であるため,

$$a_{k+1} - \sqrt{3} = \frac{(a_k - \sqrt{3})^2}{2a_k} > 0$$

よって,

$$0 < a_{k+1} - \sqrt{3} < \left(\frac{1}{2} \right)^k$$

であるので, $n=k+1$ でも命題は成立する。

以上[1], [2]から, 数学的帰納法より, 命題が真であることが示された。

(証明完了)

(3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = 0$$

より, はさみうちの定理から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - \sqrt{3}) = 0$$

となる。よって,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{3}$$

(答) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{3}$

第3問

(1)

どの数字を4回出すかによって、条件を満たすカードの取り出し方は

$$10 \text{ (通り)}$$

である。カードの取り出し方は全部で

$$10^4 \text{ (通り)}$$

であるので、求める確率は、

$$\frac{10}{10^4} = \frac{1}{1000}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{1}{1000}$$

(2)

取り出す2種類の数の組み合わせは

$${}_{10}C_2 = 45 \text{ (通り)}$$

である。それらの数が書かれているカードから4回取り出す場合の数は

$$2^4 \text{ (通り)}$$

であり、そのうち結果として4回とも同じ数字のカードを取り出してしまう場合の数は

$$2 \text{ (通り)}$$

である。以上から、求める確率は、

$$\frac{45 \cdot (2^4 - 2)}{10^4} = \frac{63}{1000}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{63}{1000}$$

(3)

取り出す3種類の数の組み合わせは

$${}_{10}C_3 = 120 \text{ (通り)}$$

である。それらの数が書かれているカードから4回取り出す場合の数は

$$3^4 = 81 \text{ (通り)}$$

である。そのうち数字が1種類しか出ない場合は

$$3 \text{ (通り)}$$

であり、数字が2種類しか出ない場合は

$${}_3C_2 (2^4 - 2) = 42 \text{ (通り)}$$

であるので、結局3種類の数から1回も取り出されない数がある場合の数は

$$3 + 42 = 45 \text{ (通り)}$$

である。以上より、求める確率は

$$120 \cdot \frac{81 - 45}{10^4} = \frac{54}{125}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{54}{125}$$

第4問

(1)

$$A = \begin{pmatrix} s_1 & s_3 \\ s_2 & s_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} t_1 & t_3 \\ t_2 & t_4 \end{pmatrix}$$

とおく。このとき

$$\begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 & s_3 \\ s_2 & s_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} s_1x+s_3y \\ s_2x+s_4y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (2+a)x+y \\ x+(2-a)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & t_3 \\ t_2 & t_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} t_1x+t_3y \\ t_2x+t_4y \end{pmatrix}$$

が任意の x, y について成立するので、係数を比較して、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ 1 & -a+2 \end{pmatrix}$$

となる。このとき

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

であるから、 $AX=B$ の左側から A^{-1} をかけて

$$X = A^{-1}B \\ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ 1 & -a+2 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \frac{a+3}{2} & \frac{-a+3}{2} \\ \frac{a+1}{2} & \frac{a-1}{2} \end{pmatrix}$$

を得る。よって、 X の逆行列が存在しない条件は

$$\frac{a+3}{2} \cdot \frac{a-1}{2} - \frac{a+1}{2} \cdot \frac{-a+3}{2} = 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 3 = 0 \\ \therefore a = \pm\sqrt{3}$$

(答) $a = \pm\sqrt{3}$

(2)

$$X^{-1} = \frac{1}{a^2-3} \begin{pmatrix} a-1 & a-3 \\ -a-1 & a+3 \end{pmatrix}$$

である。全ての成分が整数であるためには、各成分の分子の絶対値が分母の絶対値より大き

いか、分子が0となる必要がある。よって、特に $(1, 1)$ 成分に注目して

$$|a-1| \geq |a^2-3| \text{ または } a-1=0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成立する。 $\textcircled{1}$ の後者が成立すると仮定すると、このとき $a=1$ であるから

$$X^{-1} = \frac{1}{1^2-3} \begin{pmatrix} 1-1 & 1-3 \\ -1-1 & 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

となり、実際に X^{-1} のすべての成分が整数となっているので、これは条件に適する。以下、 $\textcircled{1}$ の前者が成り立つと仮定する場合を考える。

[1] $a \geq \sqrt{3}$ のとき

$$a-1 \geq a^2-3 \\ \Leftrightarrow a^2-a-2 \leq 0 \\ \Leftrightarrow -1 \leq a \leq 2$$

より、

$$\sqrt{3} \leq a \leq 2$$

となる。これを満たす整数は2が考えられる。

[2] $1 \leq a < \sqrt{3}$ のとき

$$a-1 \geq -a^2+3 \\ \Leftrightarrow a^2+a-4 \geq 0 \\ \Leftrightarrow a \leq \frac{-1-\sqrt{17}}{2}, \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \leq a$$

より、

$$\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \leq a < \sqrt{3}$$

となる。これを満たす整数は存在しない。

[3] $-\sqrt{3} \leq a < 1$ のとき

$$-a+1 \geq -a^2+3 \\ \Leftrightarrow a^2-a-2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow a \leq -1, 2 \leq a$$

より、

$$-\sqrt{3} \leq a \leq -1$$

となる。これを満たす整数は-1が考えられる。

[4] $a < -\sqrt{3}$ のとき

$$-a+1 \geq a^2-3 \\ \Leftrightarrow a^2+a-4 \leq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{-1-\sqrt{17}}{2} \leq a \leq \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$$

より、

$$\frac{-1-\sqrt{17}}{2} \leq a < -\sqrt{3}$$

である。これを満たす整数は-2が考えられる。

以上[1]～[4]から、 a は

$$a = -2, -1, 2$$

のいずれかを満たすことが必要条件である。実際に X^{-1} を計算すると、いずれの場合もすべての成分が整数となっているので、これらは十分条件でもある。

以上から、行列 X^{-1} のすべての成分が整数であるような整数 a は

$$a = \pm 2, \pm 1$$

である。

(答) $a = \pm 2, \pm 1$