

第1問

(1)

C_2 の方程式は

$$y = \sqrt{1-x^2} \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

であるから,

$$\frac{2}{3}x^2 = \sqrt{1-x^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{9}x^4 = 1-x^2$$

$$\Leftrightarrow (4x^2-3)(x^2+3)=0$$

より,

$$x^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

を得る。これはともに x の定義域を満たす。よって, P, Q の座標は

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

(2)

P の x 座標が Q の x 座標より小さいとしても一般性を失わない。直線 PQ と y 軸との交点を R とおくと, $\triangle OQR$ は $\angle QOR = 60^\circ$ の直角三角形であり, 同様に $\triangle OPR$ も $\angle POR = 60^\circ$ の直角三角形である。

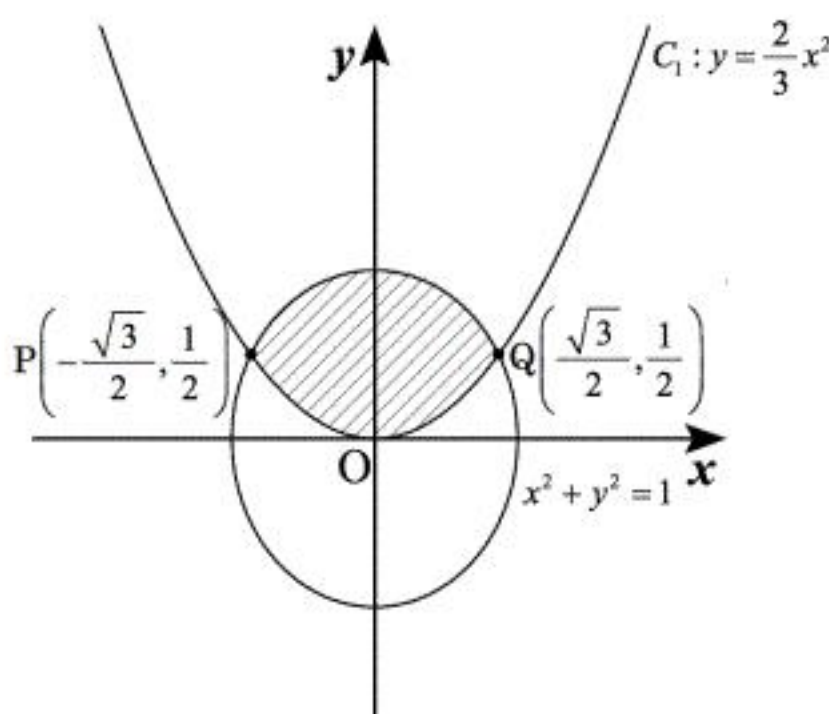
よって, 扇形 OPQ は中心角が 120° であるから, その面積は,

$$1^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{3} = \frac{\pi}{3}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\pi}{3}$$

(3)



上図の斜線部の面積が求める面積である。

$$\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{3}x^2 \right) dx = 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2} dx - 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{2}{3}x^2$$

ここで, $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2} dx$ において $x = \sin \theta$ とおくと, $dx = \cos \theta d\theta$ であり,

x	$0 \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{3}$

より,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1-\sin^2 \theta} \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{4\pi+3\sqrt{3}}{24} \end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2} dx - 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{2}{3}x^2 &= \frac{4\pi+3\sqrt{3}}{12} - \left[\frac{4}{9}x^3 \right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{4\pi+\sqrt{3}}{12} \end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad \frac{4\pi+\sqrt{3}}{12}$$

第2問

(1)

$$\begin{aligned}AB &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ac-bd & -ad-bc \\ bc+ad & -bd+ac \end{pmatrix}\end{aligned}$$

より, $AB=O$ ならば

$$ac-bd=0 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$bc+ad=0 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

となる必要がある。ここで, b の値で場合分けをする。

[1] $b \neq 0$ のとき

①より

$$d = \frac{ac}{b}$$

となるので, これを②に代入して,

$$\begin{aligned}\frac{a^2c}{b} &= -bc \\ \Leftrightarrow (a^2+b^2)c &= 0\end{aligned}$$

$b \neq 0$ より $a^2+b^2 \neq 0$ であるから,

$$c=0$$

となり,

$$d = \frac{ac}{b} = 0$$

を得る。よって

$$B=O$$

が成り立つ。

[2] $b=0$ のとき

①, ②は

$$\begin{cases} ac=0 \\ ad=0 \end{cases}$$

となる。

$a=0$ のときは

$$A=O$$

が成り立ち,

$a \neq 0$, すなわち $c=d=0$ のときは

$$B=O$$

が成り立つ。

以上[1],[2]より, $AB=O$ ならば $A=O$ または $B=O$ であることが示された。

(証明完了)

(2)

$$\begin{aligned}X^2 &= \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p^2-q^2 & -2pq \\ 2pq & p^2-q^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

より,

$$\begin{cases} q^2-p^2=1 \\ pq=0 \end{cases}$$

[1] $q=0$ のとき

$$-p^2=1$$

となり, これを満たす実数 p は存在しない。

[2] $p=0$ のとき

$$\begin{aligned}q^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow q &= \pm 1\end{aligned}$$

となる。

以上[1],[2]より, $X^2=-E$ を満たす p, q の組は

$$(p, q) = (0, \pm 1)$$

となる。

(答) $(p, q) = (0, \pm 1)$

(3)

$$\begin{aligned}Y^3 &= \begin{pmatrix} r^2-s^2 & -2rs \\ 2rs & r^2-s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & -s \\ s & r \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r^3-3rs^2 & s^3-3r^2s \\ 3r^2s-s^3 & r^3-3rs^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

より,

$$\begin{cases} r^3-3rs^2=1 \\ s^3-3r^2s=0 \Leftrightarrow s(s^2-3r^2)=0 \end{cases}$$

を得る。

[1] $s=0$ のとき

$$\begin{aligned}r^3 &= 1 \\ \Leftrightarrow r &= 1\end{aligned}$$

となる。

[2] $s^2=3r^2$ のとき

$$\begin{aligned}r^3-3rs^2 &= r^3-3r \cdot 3r^2 \\ &= -8r^3\end{aligned}$$

であり, これが1であることから

$$\begin{aligned}-8r^3 &= 1 \\ \Leftrightarrow r &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。このとき

$$s = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

である。

以上[1],[2]から, $Y^3=E$ を満たす r, s の組は

$$(r, s) = (1, 0), \left(-\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

である。

(答) $(r, s) = (1, 0), \left(-\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

第3問

(1)

$$f(x) = x - \log x$$

とおく。

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

より、増減表は次のようになる。

x	0	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$			1	

これより、

$$f(x) = x - \log x \geq 1$$

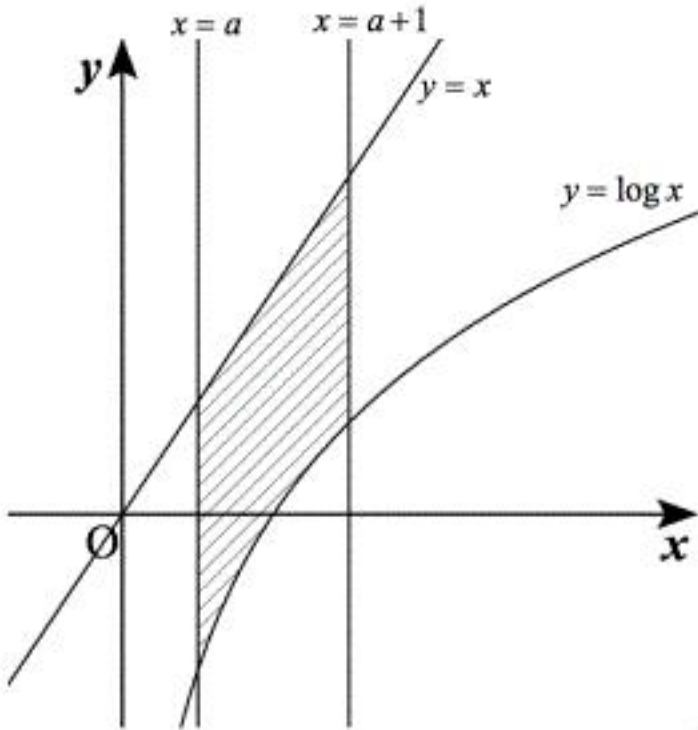
であるから、

$$x \geq \log x + 1 > \log x$$

が成立する。

(証明完了)

(2)



上図の斜線部の面積が求める面積であるから、

$$\begin{aligned} S &= \int_a^{a+1} (x - \log x) dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x^2 - x \log x + x \right]_a^{a+1} \\ &= \frac{2a+3}{2} + a \log a - (a+1) \log (a+1) \end{aligned}$$

(答) $S = \frac{2a+3}{2} + a \log a - (a+1) \log (a+1)$

(3)

$$\begin{aligned} \frac{dS}{da} &= 1 + \log a + 1 - \log (a+1) - 1 \\ &= 1 + \log \frac{a}{a+1} \\ &= \log \frac{ea}{a+1} \end{aligned}$$

より、増減表は次のようになる。

a	0	...	$\frac{1}{e-1}$	...
$\frac{dS}{da}$		-	0	+
S			最小	

よって、 S が最小値をとるのは

$$a = \frac{1}{e-1}$$

のときであり、その値は

$$\begin{aligned} &\frac{2 \cdot \frac{1}{e-1} + 3}{2} - \left(\frac{1}{e-1} + 1 \right) \log \left(\frac{1}{e-1} + 1 \right) + \frac{1}{e-1} \log \frac{1}{e-1} \\ &= \frac{1}{2} + \log (e-1) \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{1}{2} + \log (e-1)$

第4問

(1)

点 P は線分 AD を $s:4-s$ に内分する点なので,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \frac{4-s}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{s}{4}\overrightarrow{OD} \\ &= \frac{4-s}{4}\vec{a} + \frac{s}{4}(\vec{a} + \vec{c}) \\ &= \vec{a} + \frac{1}{4}s\vec{c}\end{aligned}$$

となる。点 Q は線分 BE を $t:4-t$ に内分する点なので,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \frac{4-t}{4}\overrightarrow{OB} + \frac{t}{4}\overrightarrow{OE} \\ &= \frac{4-t}{4}\vec{b} + \frac{t}{4}(\vec{b} + \vec{c}) \\ &= \vec{b} + \frac{1}{4}t\vec{c}\end{aligned}$$

となる。よって,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \\ &= \vec{b} + \frac{1}{4}t\vec{c} - \left(\vec{a} + \frac{1}{4}s\vec{c}\right) \\ &= -\vec{a} + \vec{b} + \frac{t-s}{4}\vec{c}\end{aligned}$$

を得る。

$$(答) \quad \overrightarrow{OP} = \vec{a} + \frac{1}{4}s\vec{c}, \quad \overrightarrow{PQ} = -\vec{a} + \vec{b} + \frac{t-s}{4}\vec{c}$$

(2)

$OP \perp PQ$ より,

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$$

である。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PQ} &= \left(\vec{a} + \frac{1}{4}s\vec{c}\right) \cdot \left(-\vec{a} + \vec{b} + \frac{t-s}{4}\vec{c}\right) \\ &= -\left|\vec{a}\right|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{s(t-s)}{16}\left|\vec{c}\right|^2 \\ &= -2 + s(t-s) \\ &= 0\end{aligned}$$

より,

$$s(t-s) = 2$$

である。 $s=0$ は不適であることから s で両辺を割って整理して

$$t = s + \frac{2}{s}$$

$$(答) \quad t = s + \frac{2}{s}$$

(3)

$\triangle OPQ$ が $OP = PQ$ の直角二等辺三角形となるのは,

$$\begin{cases} OP \perp PQ \\ |\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{PQ}| \end{cases}$$

が成立するときである。

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OP}|^2 &= \left|-\vec{a} + \frac{1}{4}s\vec{c}\right|^2 \\ &= \left|\vec{a}\right|^2 + \frac{1}{16}s^2\left|\vec{c}\right|^2 \\ &= 3 + s^2 \\ |\overrightarrow{PQ}|^2 &= \left|-\vec{a} + \vec{b} + \frac{t-s}{4}\vec{c}\right|^2 \\ &= \left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 + \frac{(t-s)^2}{16}\left|\vec{c}\right|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= 6 + (t-s)^2\end{aligned}$$

と計算されるので, (2) より, $t = s + \frac{2}{s}$ の下で,

$$\begin{aligned}3 + s^2 &= 6 + (t-s)^2 \\ \Leftrightarrow 3 + s^2 &= 6 + \left(\frac{2}{s}\right)^2 \\ \Leftrightarrow s^4 - 3s^2 - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (s^2 + 1)(s^2 - 4) &= 0\end{aligned}$$

より,

$$s = \pm 2$$

を得る。 s は長さであるから正なので,

$$s = 2$$

となり, このとき

$$\begin{aligned}t &= s + \frac{2}{s} \\ &= 2 + 1 \\ &= 3\end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad s = 2, \quad t = 3$$