

第1問

(1)

$$\left(\frac{1}{27}\right)^x < 3^{5x-2}$$

$$\Leftrightarrow 3^{-3x} < 3^{5x-2}$$

$$\Leftrightarrow -3x < 5x-2$$

$$\Leftrightarrow -8x < -2$$

$$\therefore x > \frac{1}{4} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。また、 $\log_9 \frac{3}{x} > 1$ について、真数条件より、

$$\frac{3}{x} > 0$$

$$\therefore x > 0$$

であり、不等式を解くと、

$$\log_9 \frac{3}{x} > 1 = \log_9 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x} > 9$$

$$\therefore 0 < x < \frac{1}{3} \quad (\because x > 0) \quad \dots \textcircled{2}$$

である。したがって①、②より、

$$\frac{1}{4} < x < \frac{1}{3}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{4} < x < \frac{1}{3}$$

(2)

$$\sqrt{3} \sin x - \cos x < \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) < \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

である。ここで、 $0 \leq x \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} \leq x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{5}{6}\pi$ であるから、

$$\sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} \leq x - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi < x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{5}{6}\pi$$

$$\therefore 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi < x \leq \pi$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi < x \leq \pi$$

第2問

(1)

それぞれの桁について1, 2, 3の3通りの選び方があるから、

$$3^5 = 243 \text{ (個)}$$

となる。

(答) 243 個

(2)

1の位は2であり、他の位は1, 2, 3の3通りの選び方があるから、

$$3^4 = 81 \text{ (個)}$$

となる。

(答) 81 個

(3)

5つの数字の和が3の倍数となれば良い。

[1] 5つの数字が(1, 1, 1, 1, 2)のとき

並べ方について、

$$\frac{5!}{4!1!} = 5 \text{ (通り)}$$

がある。

[2] 5つの数字が(1, 1, 1, 3, 3)のとき

並べ方について、

$$\frac{5!}{3!2!} = 10 \text{ (通り)}$$

がある。

[3] 5つの数字が(1, 1, 2, 2, 3)のとき

並べ方について、

$$\frac{5!}{2!2!1!} = 30 \text{ (通り)}$$

がある。

[4] 5つの数字が(1, 2, 2, 2, 2)のとき

並べ方について、

$$\frac{5!}{1!4!} = 5 \text{ (通り)}$$

がある。

[5] 5つの数字が(1, 2, 3, 3, 3)のとき

並べ方について、

$$\frac{5!}{1!1!3!} = 20 \text{ (通り)}$$

がある。

[6] 5つの数字が(2, 2, 2, 3, 3)のとき

並べ方について、

$$\frac{5!}{3!2!} = 10 \text{ (通り)}$$

がある。

[7] 5つの数字が(3, 3, 3, 3, 3)のとき

並べ方について、1通りである。

したがって、3の倍数となる数は[1]～[7]より、

$$5 + 10 + 30 + 5 + 20 + 10 + 1 = 81 \text{ (個)}$$

となる。

(答) 81 個

(4)

下2桁が4の倍数となればよい。

[1] 下2桁が12のとき

他の3桁は1, 2, 3の3通りの選び方があるから、

$$3^3 = 27 \text{ (通り)}$$

である。

[2] 下2桁が32のとき

他の3桁は1, 2, 3の3通りの選び方があるから、

$$3^3 = 27 \text{ (通り)}$$

である。

したがって、4の倍数となる数は[1], [2]より、

$$27 + 27 = 54 \text{ (個)}$$

となる。

(答) 54 個

(5)

下1桁が2であり、5つの数字の和が3の倍数であればよい。

[1] 上4桁の数が(1, 1, 1, 1)のとき

並べ方について、1通りである。

[2] 上4桁の数が(1, 1, 2, 3)のとき

並べ方について、

$$\frac{4!}{2!1!1!} = 12 \text{ (通り)}$$

がある。

[3] 上4桁の数が(1, 2, 2, 2)のとき

並べ方について、

$$\frac{4!}{1!3!} = 4 \text{ (通り)}$$

がある。

[4] 上4桁の数が(1, 3, 3, 3)のとき

並べ方について、

$$\frac{4!}{1!3!} = 4 \text{ (通り)}$$

がある。

[5] 上4桁の数が(2, 2, 3, 3)のとき

並べ方について、

$$\frac{4!}{2!2!} = 6 \text{ (通り)}$$

がある。

したがって、6の倍数となる数は[1]～[5]より、

$$1 + 12 + 4 + 4 + 6 = 27 \text{ (個)}$$

となる。

(答) 27 個

第3問

(1)

点Pが△ABCの周および内部にあるための条件は、

$$0 \leq k \leq 1, 0 \leq \ell \leq 1, 0 \leq k + \ell \leq 1$$

となる。

$$(\text{答}) 0 \leq k \leq 1, 0 \leq \ell \leq 1, 0 \leq k + \ell \leq 1$$

(2)

$$5\overrightarrow{AP} + 11\overrightarrow{CP} = 2\overrightarrow{CB}$$

$$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{AP} + 11(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC}) = 2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$$

$$\Leftrightarrow 16\overrightarrow{AP} - 2\overrightarrow{AB} - 9\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (16k - 2)\overrightarrow{AB} + (16\ell - 9)\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

であり、 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ は一次独立なベクトルなので、

$$\begin{cases} 16k - 2 = 0 \\ 16\ell - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} k = \frac{1}{8} \\ \ell = \frac{9}{16} \end{cases}$$

となる。

$$(\text{答}) k = \frac{1}{8}, \ell = \frac{9}{16}$$

(3)

直線APと線分BCの交点をSとする。このとき、実数kを用いて、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AS} &= k\overrightarrow{AP} \\ &= \frac{1}{8}k\overrightarrow{AB} + \frac{9}{16}k\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

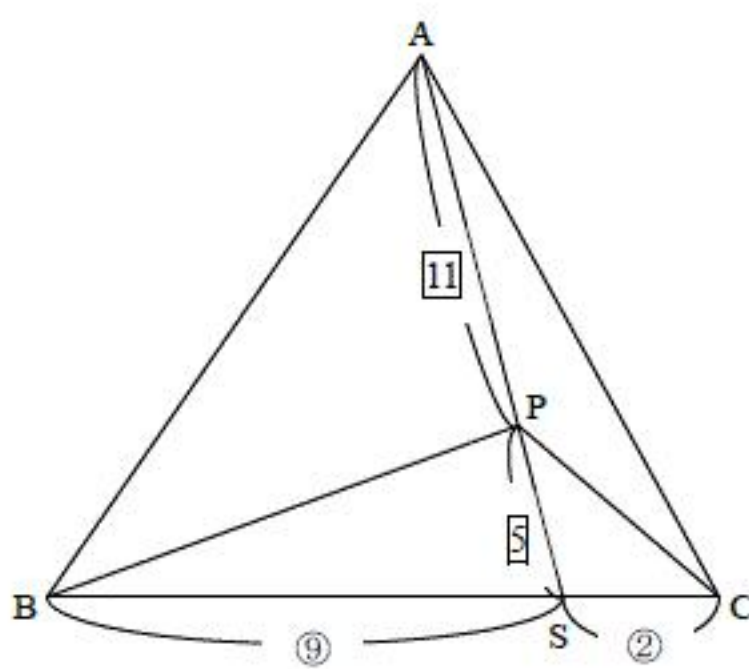
となるが、SはBC上にあるので、

$$\begin{aligned} \frac{1}{8}k + \frac{9}{16}k &= 1 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{16}{11} \end{aligned}$$

となる。よって、AP:PS=11:5である。また、

$$\overrightarrow{AS} = \frac{2}{11}\overrightarrow{AB} + \frac{9}{11}\overrightarrow{AC}$$

であるから、BS:SC=9:2である。よって、次図が描ける。



ゆえに、△ABCの面積をTとすると、

$$\triangle PAB = T \cdot \frac{BS}{BC} \cdot \frac{AP}{AS} = \frac{9}{16}T$$

$$\triangle PBC = T \cdot \frac{PS}{AS} = \frac{5}{16}T$$

$$\triangle PCA = T \cdot \frac{CS}{BC} \cdot \frac{AP}{AS} = \frac{2}{16}T$$

である。したがって、

$$\triangle PAB : \triangle PBC : \triangle PCA = \frac{9}{16}T : \frac{5}{16}T : \frac{2}{16}T = 9 : 5 : 2$$

である。

$$(\text{答}) 9 : 5 : 2$$

第4問

(1)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 0 \\
 \Leftrightarrow x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x &= 0 \\
 \Leftrightarrow x(x^3 - 4x^2 - 2x + 12) &= 0 \\
 \Leftrightarrow x(x-2)(x^2 - 2x - 6) &= 0 \\
 \therefore x &= 0, 2, 1 \pm \sqrt{7}
 \end{aligned}$$

となる。

(答) $x = 0, 2, 1 \pm \sqrt{7}$

(2)

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12 \\
 &= 4(x^3 - 3x^2 - x + 3) \\
 &= 4(x-1)(x^2 - 2x - 3) \\
 &= 4(x-1)(x+1)(x+3)
 \end{aligned}$$

であるから、関数 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	...	-1	...	1	...	3	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	-9	$\nearrow$	7	$\searrow$	-9	$\nearrow$

増減表より、 $x=1$ のとき関数 $f(x)$ は極大値 7 をとる。

(答) 極大値 7 ($x=1$ のとき)

(3)

$$-1 \leq x \leq 0 \text{ のとき } |f(x)| = -f(x)$$

$$0 \leq x \leq 1 \text{ のとき } |f(x)| = f(x)$$

であるから、

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 |f(x)| dx &= \int_{-1}^0 (-x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 12x) dx + \int_0^1 (x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{5}x^5 + x^4 + \frac{2}{3}x^3 - 6x^2 \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{5}x^5 - x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 6x^2 \right]_0^1 \\
 &= -\left(\frac{1}{5} + 1 - \frac{2}{3} - 6 \right) + \left(\frac{1}{5} - 1 - \frac{2}{3} + 6 \right) \\
 &= 10
 \end{aligned}$$

となる。

(答) 10