

第1問

(1)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 0 \\
 \Leftrightarrow x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x &= 0 \\
 \Leftrightarrow x(x^3 - 4x^2 - 2x + 12) &= 0 \\
 \Leftrightarrow x(x-2)(x^2 - 2x - 6) &= 0 \\
 \Leftrightarrow x = 0, 2, 1 \pm \sqrt{7}
 \end{aligned}$$

となる。

(答) $x = 0, 2, 1 \pm \sqrt{7}$

(2)

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12 \\
 &= 4(x^3 - 3x^2 - x + 3) \\
 &= 4(x-1)(x^2 - 2x - 3) \\
 &= 4(x-1)(x+1)(x-3)
 \end{aligned}$$

であるため、関数 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	...	-1	...	1	...	3	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	-9	$\nearrow$	7	$\searrow$	-9	$\nearrow$

増減表より、 $x=1$ のとき関数 $f(x)$ は極大値 7 をとる。

(答) $x=1$ のとき、極大値 7

(3)

(1), (2)より、

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & (0 \leq x \leq 1 \text{ のとき}) \\ -f(x) & (-1 \leq x \leq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

であるため、

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 |f(x)| dx &= \int_{-1}^0 (-x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 12x) dx + \int_0^1 (x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{5}x^5 + x^4 + \frac{2}{3}x^3 - 6x^2 \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{5}x^5 - x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 6x^2 \right]_0^1 \\
 &= -\left(\frac{1}{5} + 1 - \frac{2}{3} - 6 \right) + \left(\frac{1}{5} - 1 - \frac{2}{3} + 6 \right) \\
 &= 10
 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\int_{-1}^1 |f(x)| dx = 10$

第2問

(1)

不等式

$$|x+2y|+|2x-y|\leq 1$$

について、以下のように場合分けをする。

[1] $x+2y\geq 0, 2x-y\geq 0$ のとき

$$|x+2y|+|2x-y|\leq 1$$

$$\Leftrightarrow (x+2y)+(2x-y)\leq 1$$

$$\Leftrightarrow y\leq -3x+1$$

となる。

[2] $x+2y\geq 0, 2x-y<0$ のとき

$$|x+2y|+|2x-y|\leq 1$$

$$\Leftrightarrow (x+2y)-(2x-y)\leq 1$$

$$\Leftrightarrow y\leq \frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$$

となる。

[3] $x+2y<0, 2x-y\geq 0$ のとき

$$|x+2y|+|2x-y|\leq 1$$

$$\Leftrightarrow -(x+2y)+(2x-y)\leq 1$$

$$\Leftrightarrow y\geq \frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$$

となる。

[4] $x+2y<0, 2x-y<0$ のとき

$$|x+2y|+|2x-y|\leq 1$$

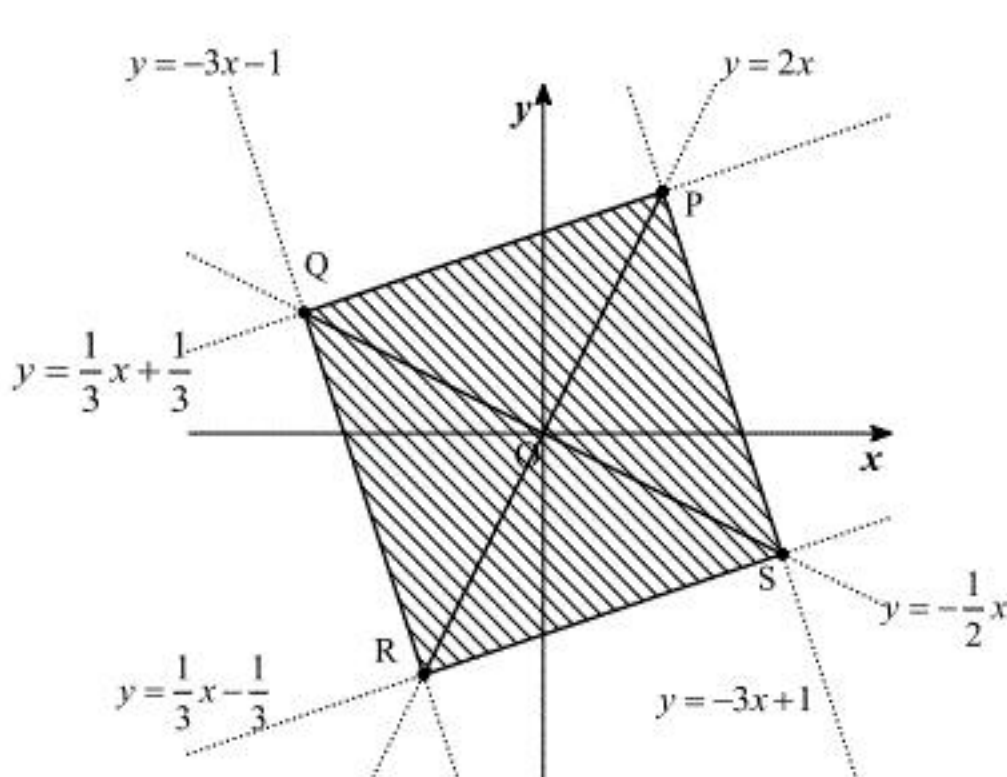
$$\Leftrightarrow -(x+2y)-(2x-y)\leq 1$$

$$\Leftrightarrow y\geq -3x-1$$

となる。

以上, [1]~[4]より, 領域 D は次図の斜線部のようになる。ただし, 点 P, Q, R, S の座標はそれ

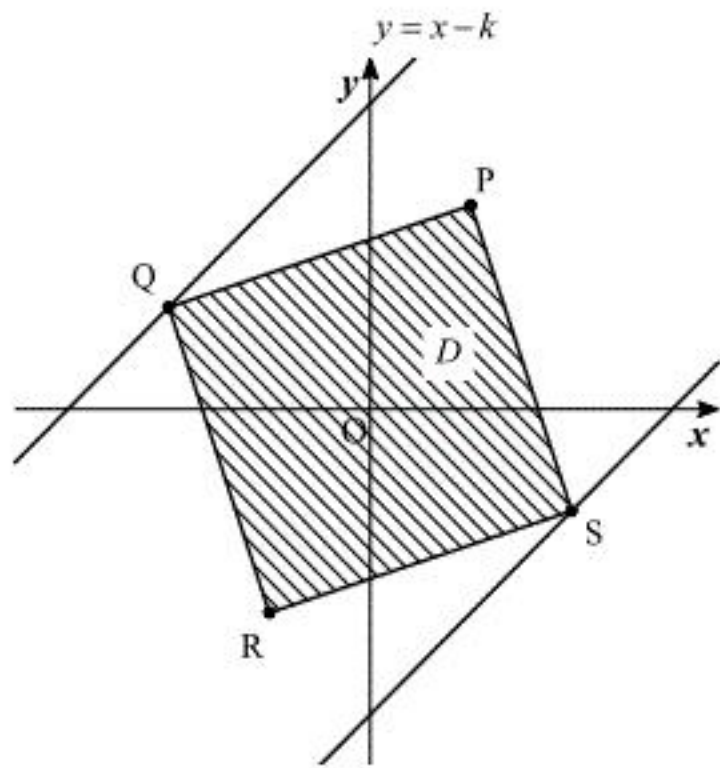
ぞれ $\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right), \left(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right), \left(-\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right), \left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right)$ であり, 境界を含む。



(答) 前図

(2)

k を実数とし, $x-y=k \Leftrightarrow y=x-k$ とおく。このとき, 図形 $y=x-k$ は傾き 1, y 切片 $-k$ の直線であり, 領域 D と直線 $y=x-k$ のグラフは次の図のようになる。



よって, 直線 $y=x-k$ が点 S を通るとき k は最大となり, Q を通るとき k は最小となる。した

がって, 領域 D において $x-y$ は $(x, y) = \left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right)$ のとき, 最大値 $\frac{2}{5} - \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{3}{5}$ をとり,

$(x, y) = \left(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$ のとき, 最小値 $-\frac{2}{5} - \frac{1}{5} = -\frac{3}{5}$ をとる。

(答) 最大値: $\frac{3}{5}$, 最小値: $-\frac{3}{5}$

(3)

l を実数とし, $|x|-|y|=l$ とおく。(1)と同様に, 以下のように場合分けをする。

[1] $x\geq 0, y\geq 0$ のとき

$$|x|-|y|=l$$

$$\Leftrightarrow x-y=l$$

$$\Leftrightarrow y=x-l$$

となる。

[2] $x<0, y\geq 0$ のとき

$$|x|-|y|=l$$

$$\Leftrightarrow -x-y=l$$

$$\Leftrightarrow y=-x-l$$

となる。

[3] $x\geq 0, y<0$ のとき

$$|x|-|y|=l$$

$$\Leftrightarrow x+y=l$$

$$\Leftrightarrow y=-x+l$$

となる。

[4] $x<0, y<0$ のとき

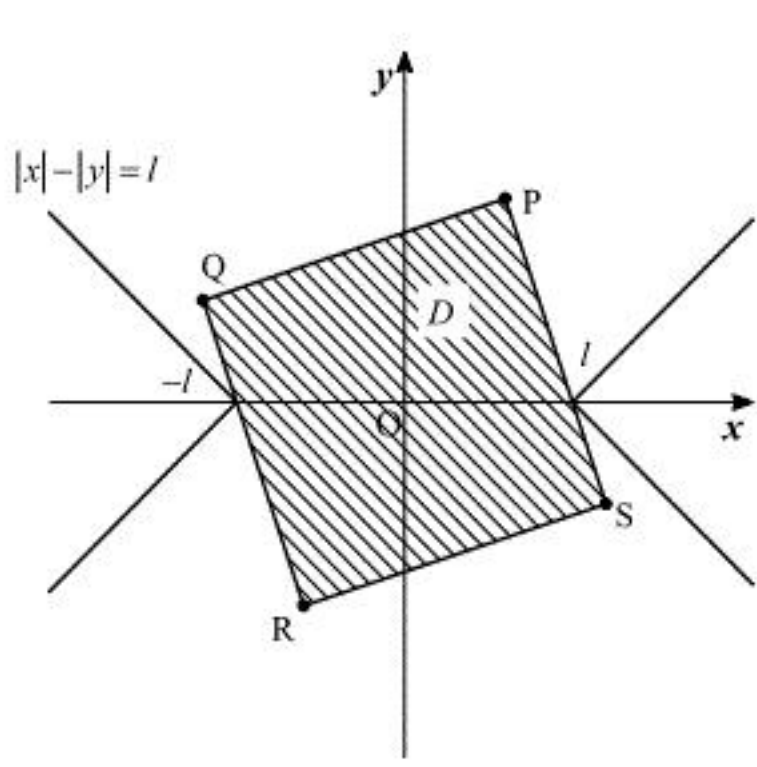
$$|x|-|y|=l$$

$$\Leftrightarrow -x+y=l$$

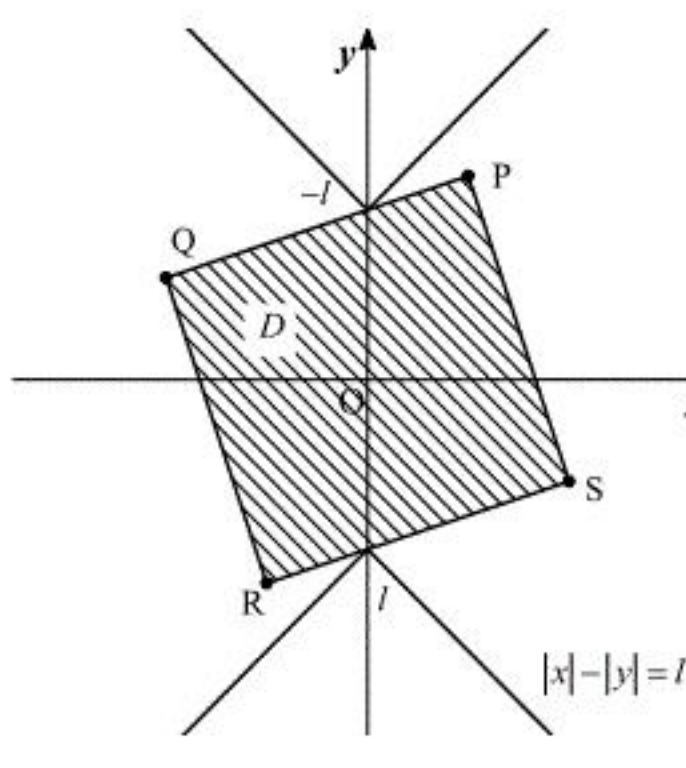
$$\Leftrightarrow y=x+l$$

となる。

以上, [1]~[4]より, $l\geq 0$ のとき, 図形 $|x|-|y|=l$ は次の図のようになる。



また, $l<0$ のとき, 図形 $|x|-|y|=l$ は次の図のようになる。



よって, 図形 $|x|-|y|=l$ が点 $\left(\frac{1}{3}, 0\right), \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ を通るとき l は最大となり, $\left(0, \frac{1}{3}\right), \left(0, -\frac{1}{3}\right)$ を通

るとき l は最小となる。したがって, 最大値は $\frac{1}{3}$, 最小値は $-\frac{1}{3}$ である。

(答) 最大値: $\frac{1}{3}$, 最小値: $-\frac{1}{3}$

第3問

(1)

曲線 C_1, C_2 は点 (p, q) を通るため、

$$q = ap^2 + n - \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$q = \log p \quad \dots \textcircled{2}$$

である。また、曲線 C_1, C_2 の方程式を x で微分するとそれぞれ、

$$C_1: y' = 2ax$$

$$C_2: y' = \frac{1}{x}$$

となり、曲線 C_1, C_2 は点 (p, q) で共通の接線をもつため、

$$2ap = \frac{1}{p} \Leftrightarrow ap^2 = \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{3}$$

である。ここで、③を①に代入すると、

$$q = \frac{1}{2} + n - \frac{1}{2} = n$$

となるため、②より、

$$n = \log p \Leftrightarrow p = e^n$$

であり、③より、

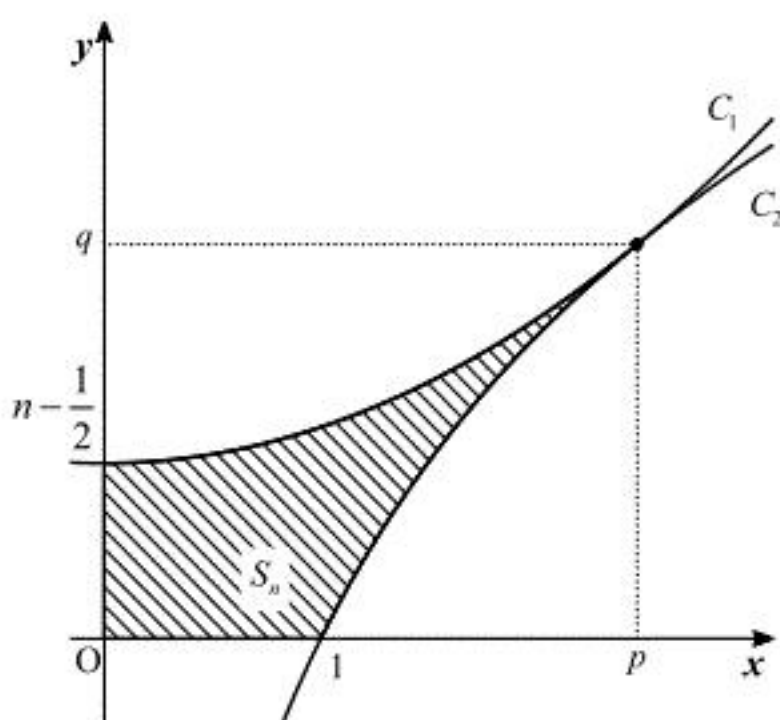
$$ae^{2n} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}e^{-2n}$$

となる。

$$(\text{答}) \ a = \frac{1}{2}e^{-2n}, (p, q) = (e^n, n)$$

(2)

曲線 C_1, C_2 は以下の図の通りである。



上図より、

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^p \left(ax^2 + n - \frac{1}{2} \right) dx - \int_1^p \log x dx \\ &= \left[\frac{1}{3} ax^3 + \left(n - \frac{1}{2} \right) x \right]_0^p - [x \log x - x]_1^p \\ &= \frac{1}{3} ap^3 + \left(n - \frac{1}{2} \right) p - \{ p \log p - p - (-1) \} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} e^{-2n} \cdot e^{3n} + \left(n - \frac{1}{2} \right) e^n - (e^n \log e^n - e^n + 1) \left(\because a = \frac{1}{2} e^{-2n}, p = e^n \right) \\ &= \frac{2}{3} e^n - 1 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \ S_n = \frac{2}{3} e^n - 1$$

(3)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n+1}}{S_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{3} e^{n+1} - 1}{\frac{2}{3} e^n - 1} \left(\because S_n = \frac{2}{3} e^n - 1 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2e - 3e^{-n}}{2 - 3e^{-n}} \\ &= \frac{2e - 3 \cdot 0}{2 - 3 \cdot 0} \left(\because 0 < e^{-1} < 1 \right) \\ &= e \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n+1}}{S_n} = e$$

第4問

(1)

$$\begin{aligned} A &= XY \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 2\sqrt{2} \\ 5\sqrt{2} & 2\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{6} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{6} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。 $k > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$ より、

$$k = \frac{\sqrt{2}}{2}, \theta = \frac{\pi}{6}$$

となる。

$$(\text{答}) \ k = \frac{\sqrt{2}}{2}, \theta = \frac{\pi}{6}$$

(2)

(1)より、行列 A は原点周りに $\frac{\pi}{6}$ 回転させ、原点からの距離を $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 倍する一次変換を表す行列

であるため、行列 A^n は原点周りに $\frac{n\pi}{6}$ 回転させ、原点からの距離を $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ 倍する一次変換を

表す行列である。また、点 $(-10^8, \sqrt{3} \times 10^8)$ は $\left(2 \cdot 10^8 \cos \frac{2}{3}\pi, 2 \cdot 10^8 \sin \frac{2}{3}\pi\right)$ と表せるため、点 P_n の座標は

$$\begin{aligned} &\left(2 \cdot 10^8 \cos \left(\frac{2}{3}\pi + \frac{n}{6}\pi\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n, 2 \cdot 10^8 \sin \left(\frac{2}{3}\pi + \frac{n}{6}\pi\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right) \\ &= \left(2^{1-\frac{n}{2}} \cdot 10^8 \cos \frac{n+4}{6}\pi, 2^{1-\frac{n}{2}} \cdot 10^8 \sin \frac{n+4}{6}\pi\right) \end{aligned}$$

となる。また、点 P_n と原点の距離は $2^{1-\frac{n}{2}} \cdot 10^8$ である。これが1より小さければよいため、

$$\begin{aligned} &2^{1-\frac{n}{2}} \cdot 10^8 < 1 \\ \Leftrightarrow &\log_{10} \left(2^{1-\frac{n}{2}} \cdot 10^8\right) < \log_{10} 1 \\ \Leftrightarrow &\left(1 - \frac{1}{2}n\right) \log_{10} 2 + 8 < 0 \\ \Leftrightarrow &n > 2 + \frac{16}{\log_{10} 2} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ より、

$$\begin{cases} 53 \log_{10} 2 = 15.953 \\ 54 \log_{10} 2 = 16.254 \end{cases}$$

であるため、

$$\begin{aligned} &53 \log_{10} 2 < 16 < 54 \log_{10} 2 \\ \Leftrightarrow &53 < \frac{16}{\log_{10} 2} < 54 \\ \Leftrightarrow &55 < 2 + \frac{16}{\log_{10} 2} < 56 \end{aligned}$$

となり、 n は自然数であるため、求める最小の自然数は56である。

$$(\text{答}) \ n = 56$$

(3)

原点と点 P_n の距離は $2^{1-\frac{n}{2}} \cdot 10^8$ であるため、点 P_n が領域 $2^8 < \sqrt{x^2 + y^2} < 2^{15}$ にあるのは、

$$\begin{aligned} &2^8 < 2^{1-\frac{n}{2}} \cdot 10^8 < 2^{15} \\ \Leftrightarrow &\log_{10} 2^8 < \log_{10} \left(2^{1-\frac{n}{2}} \cdot 10^8\right) < \log_{10} 2^{15} \\ \Leftrightarrow &8 \log_{10} 2 < \left(1 - \frac{1}{2}n\right) \log_{10} 2 + 8 < 15 \log_{10} 2 \\ \Leftrightarrow &-28 + \frac{16}{\log_{10} 2} < n < -14 + \frac{16}{\log_{10} 2} \end{aligned}$$

となるときであり、(2)より、

$$\begin{cases} 25 < -28 + \frac{16}{\log_{10} 2} < 26 \\ 39 < -14 + \frac{16}{\log_{10} 2} < 40 \end{cases}$$

となるため、 $26 \leq n \leq 39$ である必要がある。次に、 $y > |x|$ の条件について、ある点が領域 $y > |x|$ にあることは、実数 α, β ($\alpha \geq 0$) を用いてその点の座標を $(\alpha \cos \beta, \alpha \sin \beta)$ と表したとき、

$$\left(2m + \frac{1}{4}\right)\pi < \beta < \left(2m + \frac{3}{4}\right)\pi$$

を満たすことと同値である。ただし、 m は整数である。したがって、点 P_n が領域 $y > |x|$ にあるのは、

$$\begin{aligned} &\left(2m + \frac{1}{4}\right)\pi < \frac{n+4}{6}\pi < \left(2m + \frac{3}{4}\right)\pi \\ \Leftrightarrow &12m - \frac{5}{2} < n < 12m + \frac{1}{2} \\ \therefore &12m - 2 \leq n \leq 12m \end{aligned}$$

を満たすときである。 $26 \leq n \leq 39$ を満たす整数 n のうち、これを満たすものは34, 35, 36であり、これが求める n の値である。

$$(\text{答}) \ n = 34, 35, 36$$