

第1問

(1)

それぞれの桁について1, 2, 3の3通りの選び方があるため、

$$3^5 = 243 \text{ (個)}$$

となる。

(答) 243 個

(2)

一の位が2となればよい。他の位は1, 2, 3の3通りの選び方があるため、

$$3^4 = 81 \text{ (個)}$$

となる。

(答) 81 個

(3)

5つの数字の和が3の倍数となれば良い。

[1] 5つの数字が1, 1, 1, 1, 2のとき

並べ方について、

$$\frac{5!}{4! \cdot 1!} = 5 \text{ (通り)}$$

である。

[2] 5つの数字が1, 1, 1, 3, 3のとき

並べ方について、

$$\frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10 \text{ (通り)}$$

である。

[3] 5つの数字が1, 1, 2, 2, 3のとき

並べ方について、

$$\frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = 30 \text{ (通り)}$$

である。

[4] 5つの数字が1, 2, 2, 2, 2のとき

並べ方について、

$$\frac{5!}{1! \cdot 4!} = 5 \text{ (通り)}$$

である。

[5] 5つの数字が1, 2, 3, 3, 3のとき

並べ方について、

$$\frac{5!}{1! \cdot 1! \cdot 3!} = 20 \text{ (通り)}$$

である。

[6] 5つの数字が2, 2, 2, 3, 3のとき

並べ方について、

$$\frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10 \text{ (通り)}$$

である。

[7] 5つの数字が3, 3, 3, 3, 3のとき

並べ方について、1通りである。

以上,[1]～[7]より、3の倍数となる数は

$$5 + 10 + 30 + 5 + 20 + 10 + 1 = 81 \text{ (個)}$$

となる。

(答) 81 個

(4)

下2桁が4の倍数となればよい。

[1] 下2桁が12のとき

他の3桁は1, 2, 3の3通りの選び方があるため、

$$3^3 = 27 \text{ (通り)}$$

である。

[2] 下2桁が32のとき

他の3桁は1, 2, 3の3通りの選び方があるため、

$$3^3 = 27 \text{ (通り)}$$

である。

以上,[1],[2]より、4の倍数となる数は

$$27 + 27 = 54 \text{ (個)}$$

となる。

(答) 54 個

(5)

一の位が2であり、5つの数字の和が3の倍数であればよい。

[1] 上4桁の数が1, 1, 1, 1のとき

並べ方について、1通りである。

[2] 上4桁の数が1, 1, 2, 3のとき

並べ方について、

$$\frac{4!}{2! \cdot 1! \cdot 1!} = 12 \text{ (通り)}$$

である。

[3] 上4桁の数が1, 2, 2, 2のとき

並べ方について、

$$\frac{4!}{1! \cdot 3!} = 4 \text{ (通り)}$$

である。

[4] 上4桁の数が1, 3, 3, 3のとき

並べ方について、

$$\frac{4!}{1! \cdot 3!} = 4 \text{ (通り)}$$

である。

[5] 上4桁の数が2, 2, 3, 3のとき

並べ方について、

$$\frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6 \text{ (通り)}$$

である。

以上,[1]～[5]より、6の倍数となる数は

$$1 + 12 + 4 + 4 + 6 = 27 \text{ (個)}$$

となる。

(答) 27 個

第2問

(1)

点Pが△ABCの周および内部にあるための条件は、

$$0 \leq k \leq 1, 0 \leq l \leq 1, 0 \leq k+l \leq 1$$

となる。

(答) $0 \leq k \leq 1, 0 \leq l \leq 1, 0 \leq k+l \leq 1$

(2)

$$5\overrightarrow{AP} + 11\overrightarrow{CP} = 2\overrightarrow{CB}$$

$$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{AP} + 11(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC}) = 2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$$

$$\Leftrightarrow 16\overrightarrow{AP} - 2\overrightarrow{AB} - 9\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2(8k-1)\overrightarrow{AB} + (16\ell-9)\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

であり、 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ は一次独立なベクトルであるため、

$$\begin{cases} 8k-1=0 \\ 16\ell-9=0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} k = \frac{1}{8} \\ \ell = \frac{9}{16} \end{cases}$$

となる。

(答) $k = \frac{1}{8}, \ell = \frac{9}{16}$

(3)

直線APと線分BCの交点をSとする。このとき、実数mを用いて、

$$\overrightarrow{AS} = m\overrightarrow{AP}$$

$$= \frac{1}{8}m\overrightarrow{AB} + \frac{9}{16}m\overrightarrow{AC}$$

となる。Sは辺BC上にあるため、

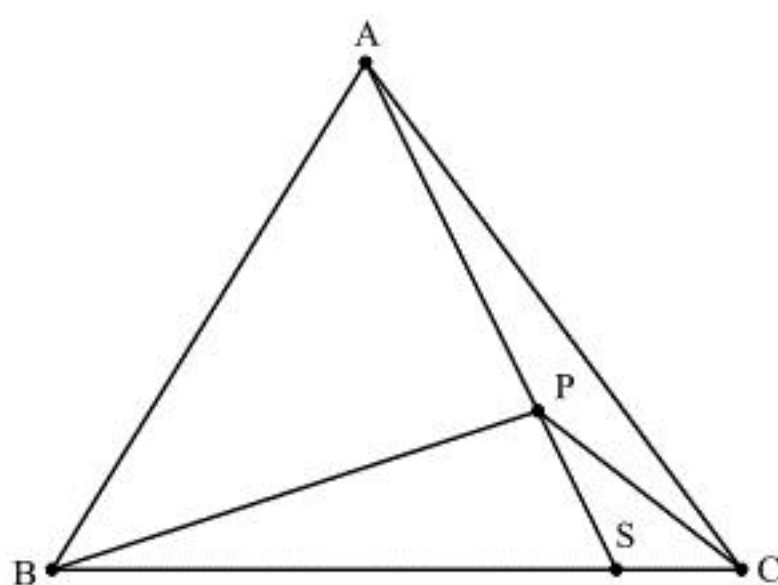
$$\frac{1}{8}m + \frac{9}{16}m = 1$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{16}{11}$$

となる。よって、AP:PS=11:5である。また、

$$\overrightarrow{AS} = \frac{2}{11}\overrightarrow{AB} + \frac{9}{11}\overrightarrow{AC}$$

であるため、BS:SC=9:2となる。よって、△ABCと点P, Sの位置は下図の通りである。



よって、△ABCの面積をTとすると、

$$\begin{aligned} \triangle PAB &= T \cdot \frac{BS}{BC} \cdot \frac{AP}{AS} \\ &= \frac{9}{16}T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangle PBC &= T \cdot \frac{PS}{AS} \\ &= \frac{5}{16}T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangle PCA &= T \cdot \frac{CS}{BC} \cdot \frac{AP}{AS} \\ &= \frac{1}{8}T \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\triangle PAB : \triangle PBC : \triangle PCA = \frac{9}{16}T : \frac{5}{16}T : \frac{1}{8}T = 9 : 5 : 2$$

である。

(答) 9:5:2

第3問

(1)

曲線 $y^2 = 8x$ を x 軸方向に a 、 y 軸方向に b だけ平行移動して得られる曲線の方程式は、

$$\begin{aligned}(y-b)^2 - 8(x-a) &= 0 \\ \Leftrightarrow y^2 - 2by - 8x + (8a+b^2) &= 0\end{aligned}$$

であり、これが曲線 C の方程式と一致すればよいから、

$$\begin{cases} -2b = -4 \\ 8a + b^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 2$$

となる。

(答) $a = b = 2$

(2)

$$\ell: y = \frac{1}{m}x + t \Leftrightarrow x = my - mt$$

であり、これを曲線 C の方程式に代入すると、

$$\begin{aligned}y^2 - 4y - 8(my - mt) + 20 &= 0 \\ \Leftrightarrow y^2 - 4(2m+1)y + 8mt + 20 &= 0\end{aligned}$$

となる。この2次方程式の判別式を D とすると、直線 ℓ と曲線 C が接するとき、 $D=0$ となるため、

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow 4(2m+1)^2 - (8mt+20) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2m^2 - (t-2)m - 2 &= 0\end{aligned}$$

が成り立ち、これが m の満たす2次方程式である。

(答) $2m^2 - (t-2)m - 2 = 0$

(3)

曲線 $C: x = \frac{1}{8}y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{5}{2}$ となるため、点 $(0, t)$ を通る曲線 C の接線の傾きは、常に0でない実

数である。つまり、そのような接線の傾きは $\frac{1}{m}$ とおくことができる。よって、(2)の m の満た

す2次方程式 $2m^2 - (t-2)m - 2 = 0$ の2解を m_1, m_2 とすると、解と係数の関係より、

$$\begin{aligned}m_1 m_2 &= \frac{-2}{2} \\ &= -1\end{aligned}$$

であるため、

$$\frac{1}{m_1} \cdot \frac{1}{m_2} = -1$$

となる。したがって、2本の接線は垂直となる。

(証明終)

第4問

(1)

曲線 C_1, C_2 が点 (p, q) を通るため、

$$q = ap^2 + n - \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$q = \log p \quad \dots \textcircled{2}$$

である。また、曲線 C_1, C_2 の方程式を微分するとそれぞれ、

$$C_1 : y' = 2ax$$

$$C_2 : y' = \frac{1}{x}$$

となり、曲線 C_1, C_2 は点 (p, q) で共通の接線をもつため、

$$2ap = \frac{1}{p} \Leftrightarrow ap^2 = \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{3}$$

である。ここで、 $\textcircled{1}$ に $\textcircled{3}$ を代入すると、

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{2} + n - \frac{1}{2} \\ &= n \end{aligned}$$

となるため、 $\textcircled{2}$ より、

$$n = \log p \Leftrightarrow p = e^n$$

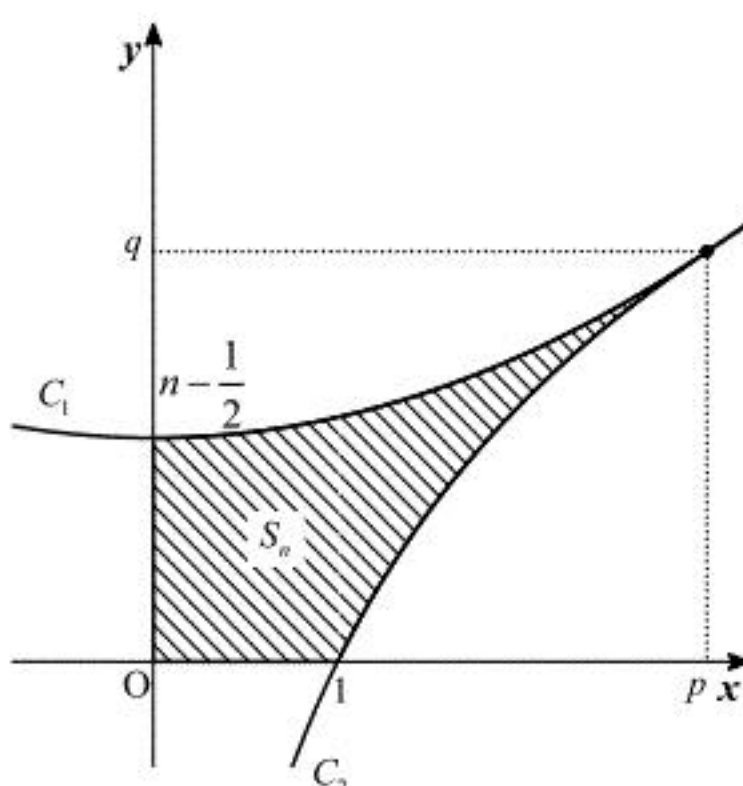
であり、 $\textcircled{3}$ より、

$$ae^{2n} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}e^{-2n}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{1}{2}e^{-2n}, (p, q) = (e^n, n)$$

(2)



図より、

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^p \left(ax^2 + n - \frac{1}{2} \right) dx - \int_1^p \log x dx \\ &= \left[\frac{1}{3}ax^3 + \left(n - \frac{1}{2} \right)x \right]_0^p - [x \log x - x]_1^p \\ &= \frac{1}{3}ap^3 + \left(n - \frac{1}{2} \right)p - \{ (p \log p - p) - (-1) \} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}e^{-2n} \cdot e^{3n} + \left(n - \frac{1}{2} \right)e^n - (e^n \log e^n - e^n + 1) \left(\because a = \frac{1}{2}e^{-2n}, p = e^n \right) \\ &= \frac{2}{3}e^n - 1 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S_n = \frac{2}{3}e^n - 1$$

(3)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n+1}}{S_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{3}e^{n+1} - 1}{\frac{2}{3}e^n - 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2e - 3e^{-n}}{2 - 3e^{-n}} \\ &= \frac{2e - 3 \cdot 0}{2 - 3 \cdot 0} \left(\because 0 < e^{-1} < 1 \right) \\ &= e \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n+1}}{S_n} = e$$