

第1問

(1)

$$x+y=5, x^3+y^3=50 \text{ より,}$$

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$$

$$\Leftrightarrow 50=5^3-3\cdot 5\cdot xy$$

$$\Leftrightarrow 15xy=75$$

$$\therefore xy=5$$

となる。この結果を用いて、

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$$

$$=5^2-2\cdot 5$$

$$=15$$

となる。さらに、以上の結果を用いて、

$$x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-(xy)^2(x+y)$$

$$=15\cdot 50-5^2\cdot 5$$

$$=625$$

となる。

$$(\text{答}) \quad xy=5, x^2+y^2=15, x^5+y^5=625$$

(2)

与式について、

$$\log_2 \frac{x}{4^3} + \log_x 4^4 < 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x - \log_2 2^6 + \frac{\log_2 2^8}{\log_2 x} < 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x - 6 + \frac{8}{\log_2 x} < 0$$

となる。ここで、 $x > 1$ より $\log_2 x > 0$ であることに注意して、

$$\log_2 x - 6 + \frac{8}{\log_2 x} < 0$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 x)^2 - 6\log_2 x + 8 < 0 \quad (\because \log_2 x > 0)$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 x - 2)(\log_2 x - 4) < 0$$

$$\Leftrightarrow 2 < \log_2 x < 4$$

$$\therefore 4 < x < 16$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 4 < x < 16$$

第2問

(1)

まず、3個のサイコロの目の出方は $6^3 (= 216)$ 通りであり、それらはすべて同様に確からしく起きる。 $a < b < c$ となるのは、3個のサイコロの目がすべて異なるような場合であり、その場合の数は ${}_6P_3 (= 120)$ 通りである。よって求める確率は

$$\frac{120}{216} = \frac{5}{9}$$

である。

(答) $\frac{5}{9}$

(2)

a, b, c のうち少なくとも二つが3となるのは、次の2つの場合である。

[1] すべての目が3である場合

3個のサイコロの目の出方は1通りである。

[2] 2個のサイコロの目だけ3となるとき

3個のサイコロの目の出方は ${}_3C_2 \cdot 5 (= 15)$ 通りである。

以上[1], [2]より、求める確率は

$$\frac{1+15}{216} = \frac{2}{27}$$

である。

(答) $\frac{2}{27}$

(3)

$b = 3$ より、 $a \leq 3 \leq c$ となる。また、 $ax^2 + 2bx + c = 0$ が実数解を持つ条件は、判別式を考えて

$$4b^2 - 4ac \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 9 - ac \geq 0$$

となる。 $a \leq 3 \leq c$ と $9 - ac \geq 0$ から (a, b, c) の組み合わせは、

$$(a, b, c) = (1, 3, 3), (1, 3, 4), (1, 3, 5), (1, 3, 6), (2, 3, 3), (2, 3, 4), (3, 3, 3)$$

が考えられる。以下、重複する数によって場合分けをする。

[1] $(a, b, c) = (1, 3, 3), (2, 3, 3)$ のとき

それぞれについて、3個のサイコロの目の出方は ${}_3C_2 (= 3)$ 通りである。

[2] $(a, b, c) = (1, 3, 4), (1, 3, 5), (1, 3, 6), (2, 3, 4)$ のとき

それぞれについて、3個のサイコロの目の出方は ${}_3P_3 (= 6)$ 通りである。

[3] $(a, b, c) = (3, 3, 3)$ のとき

3個のサイコロの目の出方は1通りである。

以上[1], [2], [3]より、求める確率は

$$\frac{3 \cdot 2 + 6 \cdot 4 + 1}{216} = \frac{31}{216}$$

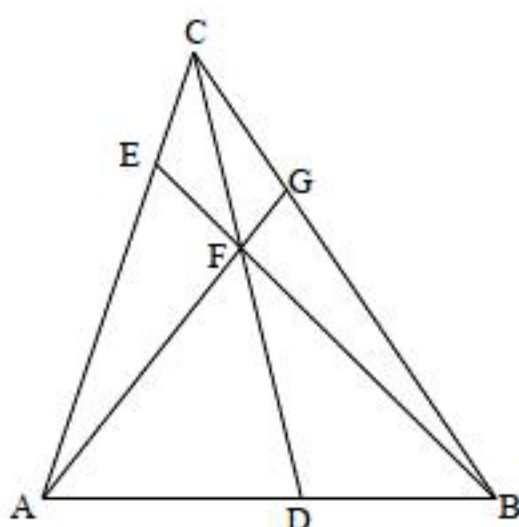
である。

(答) $\frac{31}{216}$

第3問

(1)

$\triangle ABC$ および点 D, E, F, G の位置関係は下図の通りである。



点 D は辺 AB を $4:3$ に内分する点であり、点 E は辺 AC を $3:1$ に内分する点であるから、

$\overrightarrow{AD} = \frac{4}{7}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ である。ここで実数 s, t ($0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1$) を用いて、

$BF:FE = s:1-s$, $CF:FD = t:1-t$ とすると、

$$\overrightarrow{AF} = (1-s)\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AE} = (1-s)\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}s\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AF} = (1-t)\overrightarrow{AC} + t\overrightarrow{AD} = (1-t)\overrightarrow{AC} + \frac{4}{7}t\overrightarrow{AB}$$

と表せる。 $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ は平行でなく、どちらも $\vec{0}$ ではないから、2式の係数を比較して

$$\begin{cases} 1-s = \frac{4}{7}t \\ \frac{3}{4}s = 1-t \end{cases} \Leftrightarrow (s, t) = \left(\frac{3}{4}, \frac{7}{16}\right)$$

となる。したがって

$$BF:FE = \frac{3}{4}:1 - \frac{3}{4} = 3:1$$

である。

(答) $BF:FE = 3:1$

(2)

(1)より $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{9}{16}\overrightarrow{AC}$ である。3点 A, F, G は1直線上にあるから、実数 k を用いて

$\overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{AF}$ と表せる。よって、

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}k\overrightarrow{AB} + \frac{9}{16}k\overrightarrow{AC}$$

となる。ここで、点 G は辺 BC 上にあるから、

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}k + \frac{9}{16}k &= 1 \\ \therefore k &= \frac{16}{13} \end{aligned}$$

となる。以上より、 $\overrightarrow{AG} = \frac{4}{13}\overrightarrow{AB} + \frac{9}{13}\overrightarrow{AC}$ となり、 $BG:GC = 9:4$ である。

(答) $BG:GC = 9:4$

(3)

$AE:EC = 3:1$, $BF:FE = 3:1$ であるから、

$$\begin{aligned} \triangle EFC &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \triangle ABC \\ &= \frac{1}{16} \triangle ABC \end{aligned}$$

となる。したがって、 $\triangle EFC:\triangle ABC = 1:16$ となる。

(答) $\triangle EFC:\triangle ABC = 1:16$

第4問

(1)

$f(x) = \sqrt{x}e^{-x}$ より

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x} - \sqrt{x}e^{-x} = \frac{e^{-x}}{2\sqrt{x}}(1-2x)$$

となる。 $0 \leq x \leq 1$ より、 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ である。ここで $0 \leq x \leq 1$ の範囲で $f(x)$ の増減表

をかくと次のようになる。

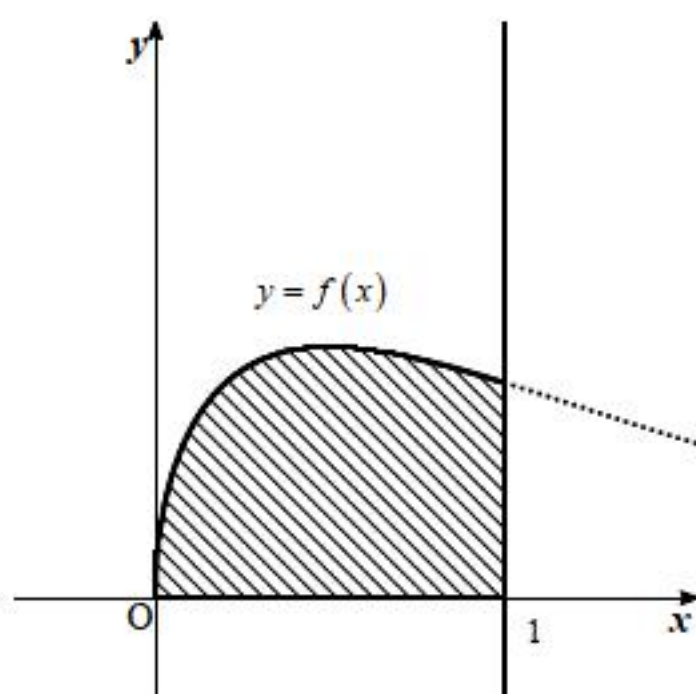
x	0	...	$\frac{1}{2}$	...	1
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2e}}$	$\searrow$	$\frac{1}{e}$

よって関数 $f(x)$ の最大値は $\frac{1}{\sqrt{2e}}$ 、最小値は 0 である。

(答) 最大値 $\frac{1}{\sqrt{2e}}$
 最小値 0

(2)

$y = f(x)$ のグラフは以下のようになる。



曲線 $y = f(x)$ と直線 $x = 1$ と x 軸で囲まれた図形を、 x 軸の周りに回転してできる立体の体積は

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \pi (\sqrt{x}e^{-x})^2 dx &= \pi \int_0^1 x e^{-2x} dx \\
 &= \pi \int_0^1 x \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right)' dx \\
 &= \pi \left[-\frac{1}{2} x e^{-2x} \right]_0^1 + \pi \int_0^1 \frac{1}{2} e^{-2x} dx \\
 &= -\frac{1}{2} \pi e^{-2} - \frac{\pi}{4} [e^{-2x}]_0^1 \\
 &= \frac{\pi}{4} (1 - 3e^{-2})
 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{\pi}{4} (1 - 3e^{-2})$