

(1)

$$C_1: y = a^3 x^2$$

について、

$$y' = 2a^3 x$$

であるから、 C_1 と l の接点の x 座標を α とすると、接線の方程式は

$$y = 2a^3 \alpha (x - \alpha) + a^3 \alpha^2$$

$$\therefore y = 2a^3 \alpha x - a^3 \alpha^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また同様に、

$$C_2: y = -\frac{1}{x}$$

について

$$y' = \frac{1}{x^2}$$

であるから、 C_2 と l の接点の x 座標を β とすると、接線の方程式は

$$y = \frac{1}{\beta^2}(x - \beta) - \frac{1}{\beta}$$

$$\therefore y = \frac{x}{\beta^2} - \frac{2}{\beta} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。①、②が一致することから、係数を比較して、

$$\begin{cases} 2a^3 \alpha = \frac{1}{\beta^2} & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^3 \alpha^2 = \frac{2}{\beta} & \dots \textcircled{4} \end{cases}$$

を得る。④より $\frac{1}{\beta} = \frac{1}{2} a^3 \alpha^2$ であるから、これを③に代入して、

$$2a^3 \alpha = \frac{1}{4} a^6 \alpha^4$$

$$\Leftrightarrow a^6 \alpha^4 - 8a^3 \alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow a^3 \alpha (a^3 \alpha^3 - 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^3 \alpha (a\alpha - 2)(a^2 \alpha^2 + 2a\alpha + 4) = 0$$

を得る。ここで、③、④より $\alpha \neq 0$ であり、また、 α は実数であるから、

$$a\alpha - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{2}{a} \quad (\because a \neq 0)$$

を得る。これを①に代入すると、求める直線 l の方程式は

$$y = 4a^2 x - 4a$$

となる。

(答) $y = 4a^2 x - 4a$

(2)

(1)の④より、

$$a^3 \alpha^2 = \frac{2}{\beta}$$

$$\Leftrightarrow 4a = \frac{2}{\beta}$$

$$\therefore \beta = \frac{1}{2a}$$

であるから、 P, Q の座標はそれぞれ、

$$P\left(\frac{2}{a}, 4a\right), Q\left(\frac{1}{2a}, -2a\right)$$

となる。これより、

$$\begin{aligned} PQ^2 &= \left(\frac{2}{a} - \frac{1}{2a}\right)^2 + (4a + 2a)^2 \\ &= \frac{9}{4a^2} + 36a^2 \end{aligned}$$

を得る。ここで、 $\frac{9}{4a^2} > 0, 36a^2 > 0$ であるから相加・相乗平均の関係より、

$$\begin{aligned} PQ^2 &= \frac{9}{4a^2} + 36a^2 \\ &\geq 2\sqrt{\frac{9}{4a^2} \cdot 36a^2} \\ &= 18 \end{aligned}$$

となる。等号成立条件は、

$$\frac{9}{4a^2} = 36a^2$$

$$\Leftrightarrow a^4 = \frac{1}{16}$$

$$\Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)\left(a + \frac{1}{2}\right)\left(a^2 + \frac{1}{4}\right) = 0$$

であり、 $a > 0$ より $a = \frac{1}{2}$ に限られる。これらより、 $PQ (> 0)$ の最小値は、

$$\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

となる。

(答) $3\sqrt{2}$

(1)

$$\begin{aligned}\sqrt{3} \sin n\theta + \cos n\theta &= 0 \\ \Leftrightarrow 2 \sin\left(n\theta + \frac{\pi}{6}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin\left(n\theta + \frac{\pi}{6}\right) &= 0\end{aligned}$$

であり、 $\theta > 0$ より $n\theta + \frac{\pi}{6} > \frac{\pi}{6}$ に限られる。よって、 $k (=1, 2, \dots)$ に対し、

$$\begin{aligned}n\theta_k + \frac{\pi}{6} &= k\pi \\ \therefore \theta_k &= \frac{6k-1}{6n}\pi\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \theta_k = \frac{6k-1}{6n}\pi$$

(2)

(1)より、

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} n \cos \frac{\theta_n}{2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cos \frac{6n-1}{12n}\pi \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{\pi}{12n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{12n}}{\frac{\pi}{12n}} \cdot \frac{\pi}{12} \\ &= \frac{\pi}{12}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\pi}{12}$$

(3)

(1)の結果を用いて、

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \frac{\theta_k}{2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \frac{6k-1}{12n}\pi \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \left(\frac{k}{2n}\pi - \frac{\pi}{12n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\cos \frac{k}{2n}\pi \cdot \cos \frac{\pi}{12n} + \sin \frac{k}{2n}\pi \cdot \sin \frac{\pi}{12n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\cos \frac{\pi}{12n} \right) \cdot \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \frac{k}{2n}\pi \right) \right\} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\sin \frac{\pi}{12n} \right) \cdot \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{2n}\pi \right) \right\}\end{aligned}$$

となる。ここで、 $-1 \leq \sin \frac{k}{2n}\pi \leq 1$ より、 $-1 \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{2n}\pi \leq 1$ であるから、

$$-\sin \frac{\pi}{12n} \leq \left(\sin \frac{\pi}{12n} \right) \cdot \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{2n}\pi \right) \leq \sin \frac{\pi}{12n}$$

となる。 $n \rightarrow \infty$ のとき、(左辺) $\rightarrow 0$ かつ (右辺) $\rightarrow 0$ であるから、はさみうちの原理より、(中辺) $\rightarrow 0$ 、つまり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\sin \frac{\pi}{12n} \right) \cdot \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{2n}\pi \right) \right\} = 0$$

が成立する。以上より、区分求積法を用いて、

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\cos \frac{\pi}{12n} \right) \cdot \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \frac{k}{2n}\pi \right) \right\} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\sin \frac{\pi}{12n} \right) \cdot \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{2n}\pi \right) \right\} \\ &= \int_0^1 \cos \frac{\pi}{2} x dx \left(\because \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{\pi}{12n} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\sin \frac{\pi}{12n} \right) \cdot \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k}{2n}\pi \right) \right\} = 0 \right) \\ &= \left[\frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} x \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{\pi}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{2}{\pi}$$

(1)

条件 1 より,

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 \\ -2y_2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

であり, 条件 2 より,

$$A^2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 \\ 4y_1 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

である。これより,

$$\begin{aligned} A^3 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} &= A^2 \cdot (-2) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= (-2) \cdot 4 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -8x_1 \\ -8y_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり, また,

$$\begin{aligned} A^3 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} &= A \cdot 4 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ &= 4 \cdot (-2) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -8x_2 \\ -8y_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。以上より, 題意は示された。

(証明終)

(2)

まず, 背理法を用いて, 点 P, Q はどちらも原点に一致しないことを示す。すなわち, 点 P, Q のどちらかが原点に一致すると仮定して矛盾を導く。点 P が原点に一致する, つまり,

 $(x_1, y_1) = (0, 0)$ と仮定すると,

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left(= -2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right)$$

より, $(x_2, y_2) = (0, 0)$ となる。これは, 点 P, Q が異なる点であることと矛盾する。また, 点 Q が原点に一致する, つまり, $(x_2, y_2) = (0, 0)$ と仮定すると,

$$A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left(= 4 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right)$$

より, $(x_1, y_1) = (0, 0)$ となる。これも, 点 P, Q が異なる点であることと矛盾する。以上より, 仮定は誤りであり, 点 P, Q はどちらも原点に一致しないことが分かった。次に, 背理法を用いて, 3 点 O, P, Q が同一直線上にないことを示す。すなわち, 3 点 O, P, Q が同一直線上にあると仮定して矛盾を導く。ここで, 点 P, Q はどちらも原点に一致しないから, x_1, y_1 は実数 k ($k \neq 0$) を用いて

$$x_2 = kx_1, y_2 = ky_1$$

と表せる。ここで, 条件 1 より,

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = -2k \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

であり, 条件 2 より,

$$A^2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} kx_1 \\ ky_1 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad \cdots \textcircled{1}$$

を得る。また,

$$\begin{aligned} A^2 \begin{pmatrix} kx_1 \\ ky_1 \end{pmatrix} &= kA \cdot A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ &= kA \cdot (-2k) \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ &= -2k^2 A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ &= -2k^2 \cdot (-2k) \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ &= 4k^3 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから, ①とあわせて,

$$4k^3 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

を得る。 $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるから,

$$4k^3 = 4$$

$$\therefore k = 1 \quad (\because k \text{ は実数})$$

となる。 $k = 1$ のとき, $x_1 = x_2, y_1 = y_2$ となり, 点 P, Q が異なる点であることと矛盾する。以上より, 仮定は誤りであり, 3 点 O, P, Q が同一直線上にないことが示された。次に,

 $x_1y_2 - x_2y_1 \neq 0$ を場合分けによって示す。
[1] $x_1 = 0$ のとき

点 P は原点に一致しないから, $y_1 \neq 0$ であり, また, 3 点 O, P, Q は同一直線上にないことから, $x_2 \neq 0$ である。よって, $x_1y_2 - x_2y_1 \neq 0$ である。

[2] $x_2 = 0$ のとき

点 Q は原点に一致しないから, $y_2 \neq 0$ であり, また, 3 点 O, P, Q は同一直線上にないことから, $x_1 \neq 0$ である。よって, $x_1y_2 - x_2y_1 \neq 0$ である。

[3] $x_1 \neq 0$ かつ $x_2 \neq 0$ のとき

3 点 O, P, Q は同一直線上にないことから, 直線 OP と直線 OQ の傾きは異なる値をとる。よって,

$$\begin{aligned} \frac{y_1}{x_1} &\neq \frac{y_2}{x_2} \\ \therefore x_1y_2 - x_2y_1 &\neq 0 \end{aligned}$$

となる。

以上, [1], [2], [3] より, $x_1y_2 - x_2y_1 \neq 0$ が示された。

(証明終)

(3)

(2)より, $x_1y_2 - x_2y_1 \neq 0$ であるから, $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ の逆行列 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}^{-1} \left(= \frac{1}{x_1y_2 - x_2y_1} \begin{pmatrix} y_2 & -x_2 \\ -y_1 & x_1 \end{pmatrix} \right)$

が存在する。ここで, (1)より,

$$A^3 \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = -8 \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

であり, 両辺の右から $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}^{-1}$ をかけることで

$$A^3 = -8E$$

を得る。

(証明終)

(1)

表の枚数によって場合分けを行う。

[1] 表が1枚の場合

残りの13枚の裏を並べ、12個ある間のいずれかに表を並べればよいので、

$${}_{12}C_1 = 12 \text{ (通り)}$$

ある。

[2] 表が2枚の場合

表表の組が存在しないことから、残りの12枚の裏を並べ、その両端に表を並べればよいので、

$$1 \text{ (通り)}$$

ある。

以上[1], [2]より、求める並べ方は

$$12 + 1 = 13 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 13通り

(2)

表の枚数によって場合分けを行う。

[1] 表が2枚の場合

残りの12枚の裏を並べ、11個ある間のいずれかに2つに表をそれぞれ並べればよいので、

$${}_{11}C_2 = 55 \text{ (通り)}$$

ある。

[2] 表が3枚の場合

表表の組が存在しないことから、残りの11枚の裏を並べ、その両端に表を並べたのち、11枚の裏のいずれかの間にもう1枚の表を並べればよいので、

$${}_{10}C_1 = 10 \text{ (通り)}$$

ある。

以上[1], [2]より、求める並べ方は

$$55 + 10 = 65 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 65通り

(3)

「表裏」の組が3個、「裏表」の組が2個となるには、列の中に表が1枚以上続くセット、裏が1枚以上続くセットが

表裏表裏表裏

のように並んでいる必要がある。さらに「表表」の組が2個となるように並べるには、このセットの並びのうち表のセットに1枚ずつ表があるとしてその3箇所はどこかにさらに2枚の表を置けばよいから、その場合の数は重複組み合わせを考えて

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6 \text{ (通り)}$$

である。「裏裏」の組が6個となるように並べるには、このセットの並びのうち裏のセットに1枚ずつ裏があるとしてその3箇所はどこかにさらに6枚の裏を置けばよいから、その場合の数は重複組み合わせを考えて

$${}_3H_6 = {}_8C_6 = {}_8C_2 = 28 \text{ (通り)}$$

ある。これより、求める並べ方は全部で

$$6 \times 28 = 168 \text{ (通り)}$$

となる。

(答) 168通り