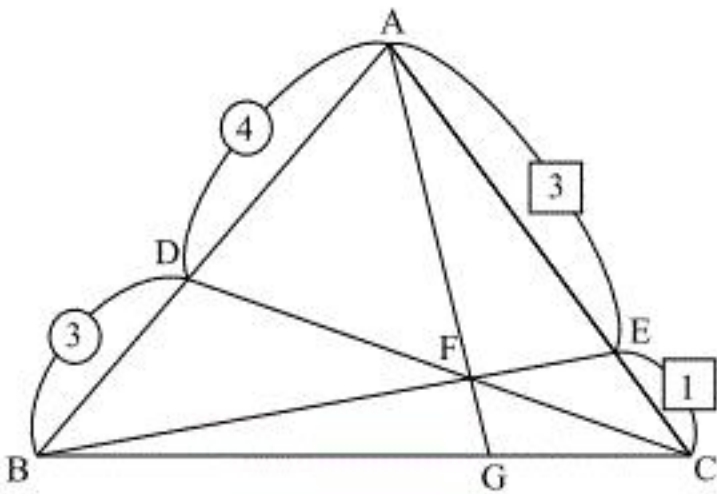


第1問

(1)



$AD : DB = 4 : 3, AE : EC = 3 : 1$

であるから、メネラウスの定理より、

$$\begin{aligned} \frac{AD}{DB} \cdot \frac{BF}{FE} \cdot \frac{EC}{CA} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{4}{3} \cdot \frac{BF}{FE} \cdot \frac{1}{4} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{BF}{FE} &= \frac{3}{1} \\ \therefore BF : FE &= 3 : 1 \end{aligned}$$

を得る。

(答) $BF : FE = 3 : 1$

(2)

(1)と同様に、

$AD : DB = 4 : 3, AE : EC = 3 : 1$

であるから、チェバの定理より、

$$\begin{aligned} \frac{AD}{DB} \cdot \frac{BG}{GC} \cdot \frac{CE}{EA} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{4}{3} \cdot \frac{BG}{GC} \cdot \frac{1}{3} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{BG}{GC} &= \frac{9}{4} \\ \therefore BG : GC &= 9 : 4 \end{aligned}$$

を得る。

(答) $BG : GC = 9 : 4$

(3)

(1)より、

$$\triangle EFC = \frac{1}{4} \triangle BCE$$

であり、また、 $AE : EC = 3 : 1$ より、

$$\triangle BCE = \frac{1}{4} \triangle ABC$$

である。これより、

$$\begin{aligned} \triangle EFC &= \frac{1}{4} \triangle BCE \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \triangle ABC \\ &= \frac{1}{16} \triangle ABC \end{aligned}$$

となり、

$\triangle EFC : \triangle ABC = 1 : 16$

を得る。

(答) $\triangle EFC : \triangle ABC = 1 : 16$

第2問

(1)

$$C_1: y = a^3 x^2$$

について、

$$y' = 2a^3 x$$

であるから、 C_1 と l の接点の x 座標を α とすると、接線の方程式は

$$y = 2a^3 \alpha (x - \alpha) + a^3 \alpha^2$$

$$\therefore y = 2a^3 \alpha x - a^3 \alpha^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また同様に、

$$C_2: y = -\frac{1}{x}$$

について

$$y' = \frac{1}{x^2}$$

であるから、 C_2 と l の接点の x 座標を β ($\beta > 0$) とすると、接線の方程式は

$$y = \frac{1}{\beta^2} (x - \beta) - \frac{1}{\beta}$$

$$\therefore y = \frac{x}{\beta^2} - \frac{2}{\beta} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。①、②が一致することから、係数を比較して、

$$\begin{cases} 2a^3 \alpha = \frac{1}{\beta^2} & \dots \textcircled{3} \\ a^3 \alpha^2 = \frac{2}{\beta} & \dots \textcircled{4} \end{cases}$$

を得る。④より $\frac{1}{\beta} = \frac{1}{2} a^3 \alpha^2$ であるから、これを③に代入して、

$$\begin{aligned} 2a^3 \alpha &= \frac{1}{4} a^6 \alpha^4 \\ \Leftrightarrow a^6 \alpha^4 - 8a^3 \alpha &= 0 \\ \Leftrightarrow a^3 \alpha (a^3 \alpha^3 - 8) &= 0 \\ \Leftrightarrow a^3 \alpha (a\alpha - 2)(a^2 \alpha^2 + 2a\alpha + 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow a^3 \alpha (a\alpha - 2) \{(a\alpha + 1)^2 + 3\} &= 0 \end{aligned}$$

を得る。ここで、 $a > 0$ であり、また③、④より $\alpha \neq 0$ である。さらに $\{(a\alpha + 1)^2 + 3\} > 0$ である

から

$$\begin{aligned} a\alpha - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha &= \frac{2}{a} (\because a \neq 0) \end{aligned}$$

を得る。これを①に代入すると、求める直線 l の方程式は

$$y = 4a^2 x - 4a$$

となる。

(答) $y = 4a^2 x - 4a$

(2)

(1)の④より、

$$\begin{aligned} a^3 \alpha^2 &= \frac{2}{\beta} \\ \Leftrightarrow 4a &= \frac{2}{\beta} \\ \therefore \beta &= \frac{1}{2a} \end{aligned}$$

であるから、 P, Q の座標はそれぞれ、

$$P\left(\frac{2}{a}, 4a\right), Q\left(\frac{1}{2a}, -2a\right)$$

となる。これより、

$$\begin{aligned} PQ^2 &= \left(\frac{2}{a} - \frac{1}{2a}\right)^2 + (4a + 2a)^2 \\ &= \frac{9}{4a^2} + 36a^2 \end{aligned}$$

を得る。ここで、 $\frac{9}{4a^2} > 0, 36a^2 > 0$ であるから相加・相乗平均の関係より、

$$\begin{aligned} PQ^2 &= \frac{9}{4a^2} + 36a^2 \\ &\geq 2\sqrt{\frac{9}{4a^2} \cdot 36a^2} \\ &= 18 \end{aligned}$$

となる。等号成立条件は、

$$\begin{aligned} \frac{9}{4a^2} &= 36a^2 \\ \Leftrightarrow a^4 &= \frac{1}{16} \\ \Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)\left(a + \frac{1}{2}\right)\left(a^2 + \frac{1}{4}\right) &= 0 \end{aligned}$$

であり、 $a > 0$ より $a = \frac{1}{2}$ に限られる。これらより、 PQ (> 0) の最小値は、

$$\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

となる。

(答) $3\sqrt{2}$

第3問

(1)

$$f(x) = \sqrt{x}e^{-x}$$

より,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{-x} + \sqrt{x} \cdot (-e^{-x}) = \frac{(1-2x)e^{-x}}{2\sqrt{x}}$$

であり,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

であるから, 増減表は以下のようになる。

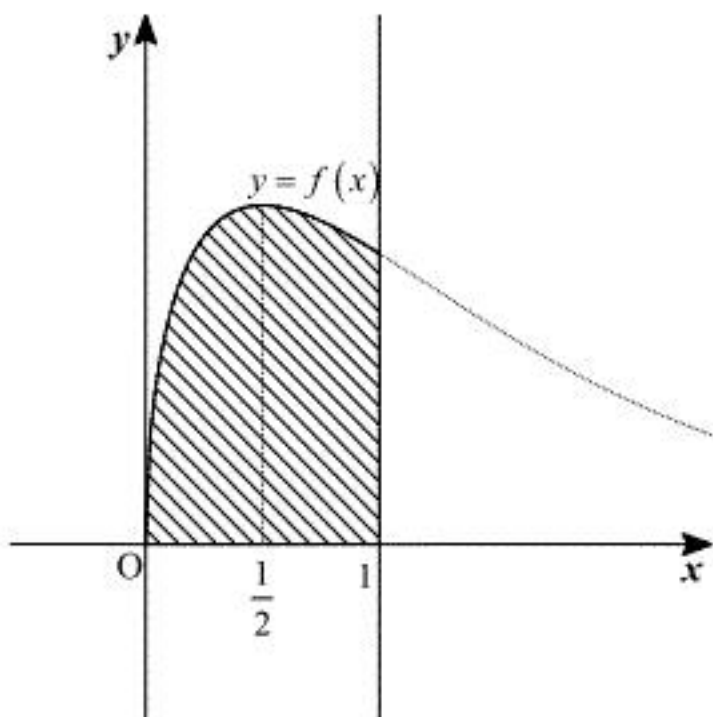
x	0	...	$\frac{1}{2}$	...	1
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2e}}$	$\searrow$	$\frac{1}{e}$

したがって, $f(x)$ は $x = \frac{1}{2}$ で最大値 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2e}}$, $x = 0$ で最小値 $f(0) = 0$ をとる。

(答) 最大値 $\frac{1}{\sqrt{2e}}$, 最小値 0

(2)

(1)より, 曲線 $f(x)$ と x 軸および直線 $x=1$ で囲まれた図形の概形は以下の斜線部のようなになる。ただし境界線を含む。



したがって, 求める回転体の体積を V とすると,

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^1 \left(\sqrt{x}e^{-x} \right)^2 dx \\
 &= \pi \int_0^1 x e^{-2x} dx \\
 &= \pi \int_0^1 x \left(-\frac{e^{-2x}}{2} \right)' dx \\
 &= \pi \left[x \left(-\frac{e^{-2x}}{2} \right) \right]_0^1 - \pi \int_0^1 \left(-\frac{e^{-2x}}{2} \right) dx \\
 &= \pi \left(-\frac{e^{-2}}{2} \right) + \pi \left[\frac{e^{-2x}}{-4} \right]_0^1 \\
 &= -\frac{e^{-2}}{2} \pi + \left(-\frac{e^{-2}}{4} + \frac{1}{4} \right) \pi \\
 &= \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{3}{e^2} \right)
 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{3}{e^2} \right)$

第4問

(1)

原点を中心とした 60° の回転移動は次の行列

$$\begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

で表される。点 P が点 Q に移ることから、

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{x}{2} - \sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ y \end{pmatrix}$$

$$\therefore x = 2, y = 1 + \sqrt{3}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad x = 2, y = 1 + \sqrt{3}$$

(2)

(1)より、条件式として

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

を得る。これより、

$$A \begin{pmatrix} 2 & 1-\sqrt{3} \\ 2 & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} & 2 \\ 1+\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} & 2 \\ 1+\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1-\sqrt{3} \\ 2 & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} & 2 \\ 1+\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \left\{ \frac{1}{4\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & -1+\sqrt{3} \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad A = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

(3)

ケーリー・ハミルトンの定理より、

$$A^2 - E = O \Leftrightarrow A^2 = E \quad (E \text{ は単位行列})$$

であるから、 k を自然数として、

$$A^{2k} = (A^2)^k = E, A^{2k-1} = (A^2)^{k-1} \cdot A = A$$

となる。したがって、

$$A + 2A^2 + 3A^3 + 4A^4 + \cdots + (2n-1)A^{2n-1} + 2nA^{2n}$$

$$= \{1+3+5+\cdots+(2n-1)\}A + (2+4+6+\cdots+2n)E$$

$$= \sum_{k=1}^n (2k-1)A + \sum_{k=1}^n 2kE$$

$$= \frac{1}{2}n\{1+(2n-1)\}A + n(n+1)E$$

$$= \begin{pmatrix} \left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)n^2+n & \frac{1}{2}n^2 \\ \frac{1}{2}n^2 & \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)n^2+n \end{pmatrix}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \begin{pmatrix} \left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)n^2+n & \frac{1}{2}n^2 \\ \frac{1}{2}n^2 & \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)n^2+n \end{pmatrix}$$