

第1問

(1)

$$(x-1)^2 - 3|x-1| + 1 < 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

を満たす整数 x を全てもとめたい。①の左辺のグラフは $x=1$ について対称なグラフとなるので、 $x \geq 1$ についてのみ調べればよい。 $x \geq 1$ のもとで①の不等式を解くと、

$$\begin{aligned} (x-1)^2 - 3(x-1) + 1 &< 0 \\ \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2} < x-1 < \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{5-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{5+\sqrt{5}}{2} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。 $2 < \sqrt{5} < 3$ より、

$$\begin{cases} 1 < \frac{5-\sqrt{5}}{2} < \frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} < \frac{5+\sqrt{5}}{2} < 4 \end{cases}$$

であるから、②を満たす整数 x の値は 2 と 3 のみである。以上より、①の左辺のグラフが $x=1$ について対称なグラフとなることに注意すれば、求める整数 x の値は $x=-1, 0, 2, 3$ である。

(答) $-1, 0, 2, 3$

(2)

全ての自然数 n に対し、

$$2^{n-1} + 3^{3n-2} + 7^{n-1} \text{ が } 5 \text{ の倍数であること} \quad \dots \textcircled{1}$$

数学的帰納法によって示す。

[i] $n=1$ のとき

$$2^{1-1} + 3^{3 \cdot 1 - 2} + 7^{1-1} = 1 + 3 + 1 = 5$$

となるので $2^{n-1} + 3^{3n-2} + 7^{n-1}$ は 5 の倍数となり、①は成り立つ。

[ii] $n=k$ ($k=0, 1, 2, \dots$) で成立を仮定し、 $n=k+1$ でも①が成り立つことを示す。

仮定より

$$2^{k-1} + 3^{3k-2} + 7^{k-1} = 5N \quad (N \text{ は自然数})$$

と表せる。このとき、

$$\begin{aligned} 2^k + 3^{3(k+1)-2} + 7^k &= 2^k + 3^{3k+1} + 7^k \\ &= 2^{k-1} + 2^{k-1} + 3^{3k-2} + 26 \cdot 3^{3k-2} + 7^{k-1} + 6 \cdot 7^{k-1} \\ &= 5N + 2^{k-1} + 26 \cdot 3^{3k-2} + 6 \cdot 7^{k-1} \\ &= 5N + 5N + 25 \cdot 3^{3k-2} + 5 \cdot 7^{k-1} \\ &= 5(2N + 5 \cdot 3^{3k-2} + 7^{k-1}) \end{aligned}$$

となるから、 $n=k+1$ においても①は成り立つ。

以上[i], [ii]より数学的帰納法は完結し、題意は示された。

(証明終)

第2問

(1)

$\overrightarrow{AP} = s\vec{u}$, $\overrightarrow{BQ} = t\vec{v}$ であるから,

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3s-4 \\ 8 \\ s+2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BQ} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t+10 \\ 3t+3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OP} = (3s-4, 8, s+2), \quad \overrightarrow{OQ} = (-t+10, 3t+3, -4)$$

(2)

点 P は直線 l 上を, 点 Q は直線 m 上を, それぞれ任意に動くことができる。したがって, 2 直線 l と m が共有点を持たないということは, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ}$ となるような s, t が存在しないということである。ここで, (1) より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OQ} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3s-4 = -t+10 \\ 8 = 3t+3 \\ s+2 = -4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3s+t = 14 \\ t = \frac{5}{3} \\ s = -6 \end{cases} \end{aligned}$$

となるが, $t = \frac{5}{3}$ と $s = -6$ を $3s+t=14$ に代入すると, $-18+\frac{5}{3}=14$ となり成り立たない。つまり

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ}$ となるような s, t が存在しない。以上より l と m が共有点を持たないことが示された。

(証明終)

(3)

(2) より $|\overrightarrow{PQ}| \neq 0$ であるから, $\overrightarrow{PQ}$ が $\vec{u}$ と $\vec{v}$ の両方に垂直であることは

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{かつ} \quad \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v} = 0$$

であることと同値である。いま,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \\ &= t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - s \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \begin{cases} \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u} = 0 \\ \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -3t-10s+42-6=0 \\ 10t-(-3)s-14-15=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 10s+3t=36 \\ 3s+10t=29 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} s=3 \\ t=2 \end{cases} \end{aligned}$$

となる。これより,

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}$$

となるから, 点 P と点 Q の座標はそれぞれ $P(5, 8, 5)$, $Q(8, 9, -4)$ である。

$$(\text{答}) \quad P(5, 8, 5), \quad Q(8, 9, -4)$$

第3問

(1)

さいころを5回投げて出た順に並べるので、すべての目の出方は、

$$6^5 = 7776 \text{ [通り]}$$

である。

(答) 7776 通り

(2)

5以上の目が2つ以上ある目の出方を求めるために、まず5以上の目が1つもでない、または1つのみ出る目の出方を求める。

[1] 5以上の目が1つもないとき

このとき、5回とも出た目が1から4のうちのどれかになるから、目の出方は、

$$4^5 = 1024 \text{ [通り]}$$

である。

[2] 5以上の目が1つのみのとき

このとき、5回のうち1回だけ5か6の目が出て、残りの4回は4以下の目が出ればよい。したがって目の出方は、

$$2 \cdot {}_5C_1 \cdot 4^4 = 2560 \text{ [通り]}$$

である。

以上[1], [2]より、5以上の目が2つ以上ある目の出方は、

$$7776 - (1024 + 2560) = 4192 \text{ [通り]}$$

である。

(答) 4192 通り

(3)

(2)と同様に、和が10以上となる2つの目を選ぶことができる目の出方を求めるために、まずどの2つの目を選んでも和が9以下となるような目の出方を求めることにする。

[1] 1回だけ6の目が出るとき

残りの4回がすべて3以下の目であればよいから、目の出方は

$${}_5C_1 \cdot 3^4 = 405 \text{ [通り]}$$

である。

[2] 1回だけ5の目が出るとき

残りの4回がすべて4以下の目であればよいから、目の出方は

$${}_5C_1 \cdot 4^4 = 1280 \text{ [通り]}$$

である。

[3] 5回とも4以下の目が出るとき

$$4^5 = 1024 \text{ [通り]}$$

である。

以上より、和が10以上となる2つの目を選ぶことができる目の出方は、

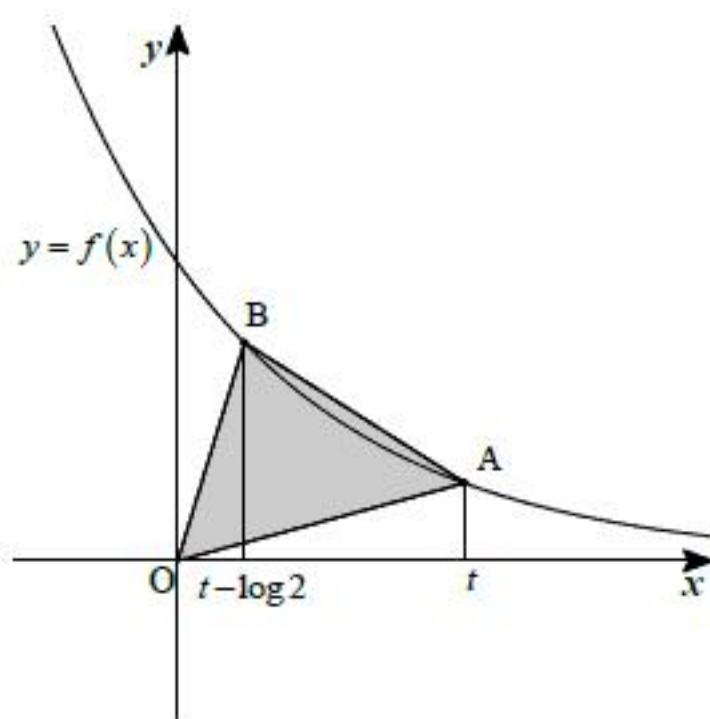
$$7776 - (405 + 1280 + 1024) = 5067 \text{ [通り]}$$

である。

(答) 5067 通り

第4問

(1)



曲線 $y = f(x) = e^{-x}$ ，点A，点Bの位置関係は上図のようになる。このとき，斜線部の面積が S である。 $t = 0$ のとき， $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ， $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -\log 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ であるから，

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \Delta(\overrightarrow{OA} \quad \overrightarrow{OB}) \\ &= \frac{1}{2} \Delta \begin{pmatrix} 0 & -\log 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \log 2 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{1}{2} \log 2$

(2)

$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$ ， $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} t - \log 2 \\ e^{-t + \log 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - \log 2 \\ 2e^{-t} \end{pmatrix}$ であるから，

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \Delta(\overrightarrow{OA} \quad \overrightarrow{OB}) \\ &= \frac{1}{2} \Delta \begin{pmatrix} t & t - \log 2 \\ e^{-t} & 2e^{-t} \end{pmatrix} \\ &= \frac{t + \log 2}{2} e^{-t} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{t + \log 2}{2} e^{-t}$

(3)

(2)で求めた S を $S(t)$ と表すことにする。この関数を t について微分すると，

$$\begin{aligned} S'(t) &= \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{t + \log 2}{2} e^{-t} \\ &= \frac{1 - \log 2 - t}{2} e^{-t} \end{aligned}$$

となるから，次の増減表を得る。

t	0	...	$1 - \log 2$	...
$S'(t)$	+	+	0	-
$S(t)$		↗	$S(1 - \log 2)$	↘

これより S の最大値は $S(1 - \log 2)$ であるから，求める最大値は

$$\begin{aligned} S(1 - \log 2) &= \frac{1 - \log 2 + \log 2}{2} e^{-(1 - \log 2)} \\ &= e^{-1} \\ &= \frac{1}{e} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{1}{e}$