

第1問

問題文の条件より

$$\begin{cases} P(x) = A(x)(x-1) - 3 \\ P(x) = Q(x)(x-2) \\ Q(x) = B(x)(x+3) + 7 \end{cases}$$

・・・①

・・・②

・・・③

とかける。

(1)

①, ②において $x=1$ とすれば

$$\begin{cases} P(1) = -3 \\ P(1) = -Q(1) \end{cases}$$

となる。したがって

$$Q(1) = 3$$

・・・④

となるから、剰余定理より $Q(x)$ を $x-1$ で割った余りは3である。

(答) 3

(2)

$P(x)$ が x^3 の係数が1の3次式であることより、②から、 $Q(x)$ は x^2 の係数が1の2次式である。したがって

$$Q(x) = x^2 + ax + b \quad (a, b \text{ はともに実数})$$

とかける。また③, ④より、

$$\begin{cases} Q(-3) = 7 \\ Q(1) = 3 \end{cases}$$

となることから、

$$\begin{cases} 9 - 3a + b = 7 \\ 1 + a + b = 3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3a + b = -2 \\ a + b = 2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

である。したがって $Q(x) = x^2 + x + 1$ である。

(答) $Q(x) = x^2 + x + 1$

(3)

$P(x)$ は x^3 の係数が1の3次式であるから、

$$P(x) = (x+c)(x-1)(x+3) + dx + e$$

・・・⑤

とおける(c, d, e は実数)。③より $Q(-3) = 7$ であるから、これと②より、

$$P(-3) = -35$$

である。また①より $P(1) = -3$ であるから、これらを⑤に代入して、

$$\begin{cases} d + e = -3 \\ -3d + e = -35 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} d = 8 \\ e = -11 \end{cases}$$

となる。よって⑤は

$$P(x) = (x+c)(x-1)(x+3) + 8x - 11$$

となる。②より $P(2) = 0$ であるから、

$$0 = (2+c) \cdot 1 \cdot 5 + 16 - 11$$
$$\Leftrightarrow c = -3$$

となる。以上より、 $P(x)$ を $(x-1)(x+3)$ で割ったときの商は $x-3$ 、余りは $8x-11$ である。

(答) 商: $x-3$, 余り: $8x-11$

第2問

(1)

点Pの最終的な位置において $x+y=6$ となるためには、順列がNとEのみで構成されていればよい。したがって求める順列の総数は、

$$2^6=64 \text{ [通り]}$$

である。

(答) 64 通り

(2)

点Pの最終的な位置において $|x+y|=4 \Leftrightarrow x+y=\pm 4$ となるためには、順列を構成する6個の文字のうち、

- [1] 4個がNかEであり、かつ残りの2個がX
- [2] 5個がNかEであり、かつ残りの1個がSかW
- [3] 4個がSかWであり、かつ残りの2個がX
- [4] 5個がSかWであり、かつ残りの1個がNかE

のいずれかとなっていればよい。対称性より[1]と[3]、[2]と[4]の順列の数はそれぞれ等しいから、[1]と[2]の順列の数を求めればよい。

[1]のとき

まず横一列に並べた6個のうち2個がXであり、その選び方は ${}_6C_2$ 通りであり、残りの4個はそれぞれ2通りずつ選べるから、求める場合の数は

$${}_6C_2 \times 2^4 = 240 \text{ [通り]}$$

である。

[2]のとき

[1]と同様に考えれば、求める場合の数は

$${}_6C_1 \times 2 \times 2^5 = 384 \text{ [通り]}$$

である。

以上[1]、[2]より、求める順列の総数は、

$$(240+384) \cdot 2 = 1248$$

である。

(答) 1248 通り

(3)

点Pの最終的な位置が原点である順列を構成する文字の組み合わせは以下の10通りが考えられる。

NSNSNS

NSNSEW

NSEWEW

EWWEWEW

NSNSXX

NSEWXX

EWEXXX

NSXXXX

EWXXXX

XXXXXX

これらの順列の個数は上から順に、

$$\frac{6!}{3!3!}, \frac{6!}{2!2!}, \frac{6!}{2!2!}, \frac{6!}{3!3!}, \frac{6!}{2!2!2!}, \frac{6!}{2!}, \frac{6!}{2!2!2!}, \frac{6!}{4!}, \frac{6!}{4!}, 1$$

である。よって求める順列の総数は、これらの和であるから、

$$20+180+180+20+90+360+90+30+30+1=1001$$

である。

(答) 1001

第3問

(1)

与えられた式を変形すると、

$$\begin{aligned} ab + \sqrt{(2-a^2)(2-b^2)} &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{(2-a^2)(2-b^2)} &= -ab \\ \Leftrightarrow a^2b^2 - 2a^2 - 2b^2 + 4 &= a^2b^2 \quad \text{かつ} \quad ab \leq 0 \quad (\because \text{両辺 2 乗}) \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 &= 2 \quad \text{かつ} \quad ab \leq 0 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となるから、求める $a^2 + b^2$ の値は2である。

(答) $a^2 + b^2 = 2$

(2)

$$B = \begin{pmatrix} a & \sqrt{2-a^2} \\ b & \sqrt{2-b^2} \end{pmatrix} \text{ と } a^2 + b^2 = 2 \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} BP &= \begin{pmatrix} a & \sqrt{2-a^2} \\ b & \sqrt{2-b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & |b| \\ b & |a| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax + |b|y \\ bx + |a|y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} |BP| &= \sqrt{(ax + |b|y)^2 + (bx + |a|y)^2} \\ &= \sqrt{(a^2x^2 + b^2y^2 + 2a|b|xy) + (b^2x^2 + a^2y^2 + 2|a|bxy)} \\ &= \sqrt{(a^2 + b^2)x^2 + (a^2 + b^2)y^2 + 2xy(a|b| + |a|b)} \\ &= \sqrt{2x^2 + 2y^2 + 2xy(a|b| + |a|b)} \end{aligned}$$

である。いま①より、 $ab \leq 0$ であることから a と b は符号が逆か、もしくはどちらかの値が0である。したがって

$$a|b| + |a|b = 0$$

となる。以上より、

$$\begin{aligned} |BP| &= \sqrt{2(x^2 + y^2)} \\ &= \sqrt{2} |P| \end{aligned}$$

となる。よって題意は示された。

(証明終)

(3)

$a^2 + b^2 = 2$ と $a|b| + |a|b = 0$ に注意すれば、

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} a & b \\ |b| & |a| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & |b| \\ b & |a| \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & a|b| + |a|b \\ a|b| + |a|b & a^2 + b^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。したがって $AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ である。

(答) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(4)

$5(A^{-1} + B^{-1}) = E$ が成り立っている。この両辺に右から B をかけると、

$$5(A^{-1}B + E) = B$$

となる。さらに両辺に左から A をかけると、(2)より

$$\begin{aligned} 5(B + A) &= AB \\ \Leftrightarrow 5 \begin{pmatrix} 2a & b + |b| \\ b + |b| & 2|a| \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 10a = 2 \\ b = -|b| \\ 10|a| = 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow a = \frac{1}{5} \quad \text{かつ} \quad a \geq 0 \quad \text{かつ} \quad b \leq 0 \end{aligned}$$

となる。したがって $a^2 + b^2 = 2$ より、

$$\begin{cases} a = \frac{1}{5} \\ b = -\frac{7}{5} \end{cases}$$

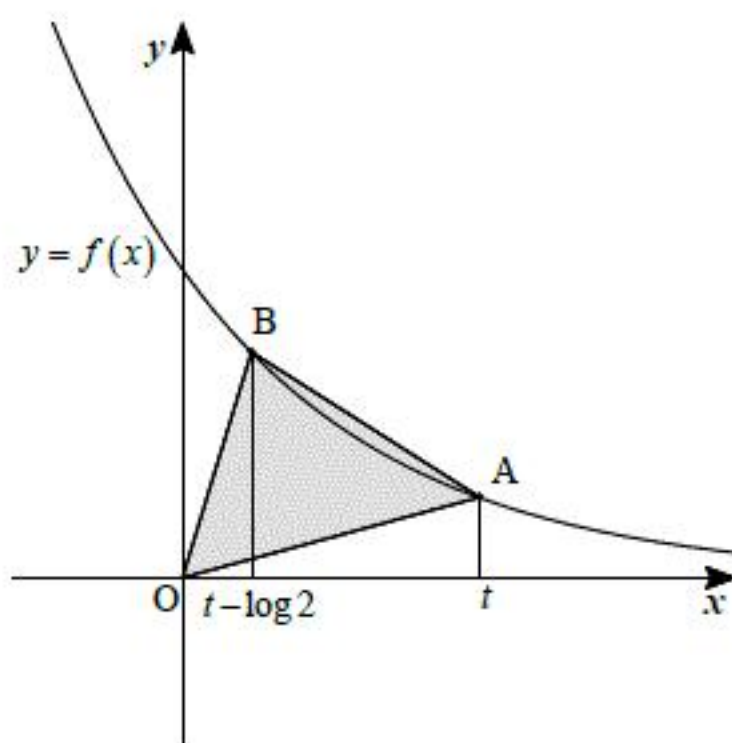
となる。以上より、

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{7}{5} \\ \frac{7}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

である。

(答) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{7}{5} \\ \frac{7}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

第4問



(1)

$y = f(x) = e^{-x}$ ，点A，点Bの位置関係は上図のようになる。このとき，斜線部の面積が S で

ある。題意より， $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$ ， $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} t - \log 2 \\ e^{-t + \log 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - \log 2 \\ 2e^{-t} \end{pmatrix}$ であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \Delta(\overrightarrow{OA} \quad \overrightarrow{OB}) \\ &= \frac{1}{2} \Delta \begin{pmatrix} t & t - \log 2 \\ e^{-t} & 2e^{-t} \end{pmatrix} \\ &= \frac{t + \log 2}{2} e^{-t} \end{aligned}$$

となる。これを $S(t)$ とかくことにすると，

$$\begin{aligned} S'(t) &= \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{t + \log 2}{2} e^{-t} \\ &= \frac{1 - \log 2 - t}{2} e^{-t} \end{aligned}$$

である。したがって次の増減表を得る。

t	0	⋯	$1 - \log 2$	⋯
$S'(t)$	+	+	0	−
$S(t)$		↗	$S(1 - \log 2)$	↘

これより S の最大値は $S(1 - \log 2)$ であるから，求める最大値は

$$\begin{aligned} S(1 - \log 2) &= \frac{1 - \log 2 + \log 2}{2} e^{-(1 - \log 2)} \\ &= e^{-1} \\ &= \frac{1}{e} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{1}{e}$

(2)

このとき，

$$\begin{aligned} S_k &= \frac{k+1}{2} (\log 2) e^{-k \log 2} \\ &= (\log 2) \frac{k+1}{2^{k+1}} \end{aligned}$$

となる。ここで， $x = \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{2^{k+1}}$ とおくと，

$$x = \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \cdots + \frac{n+1}{2^{n+1}} \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。またこの両辺に $\frac{1}{2}$ をかけると

$$\frac{x}{2} = \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \cdots + \frac{n}{2^{n+1}} + \frac{n+1}{2^{n+2}} \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。したがって①−②より，

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} &= \frac{2}{2^2} + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \right) - \frac{n+1}{2^{n+2}} \\ \Leftrightarrow x &= 1 + \frac{\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{n+1}{2^{n+1}} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2^n} - \frac{n+1}{2^{n+1}} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{3}{2} - \frac{n+3}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

となる。以上より，

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n S_k &= \sum_{k=1}^n (\log 2) \frac{k+1}{2^{k+1}} \\ &= (\log 2) x \\ &= \left(\frac{3}{2} - \frac{n+3}{2^{n+1}} \right) \log 2 \end{aligned}$$

である。

(答) $\left(\frac{3}{2} - \frac{n+3}{2^{n+1}} \right) \log 2$