

第1問

(1)

ケーリー・ハミルトンの定理より、

$$A^2 - (a+b)A + (ab - ab)E = 0$$

$$\therefore A^2 = (a+b)A$$

となる。一方、

$$A^2 = cA$$

であるから、2つの式から

$$\{(a+b) - c\}A = 0$$

となる。ここで $a=b=0$ のときは

$$A = 0$$

となるから、 c は任意の実数で題意を満たす。一方、それ以外の場合は

$$A \neq 0$$

であるから、

$$c = a+b$$

のときに題意の条件は満たされる。

(答) $a=b=0$ のとき c は任意の実数、それ以外のとき $c=a+b$

(2)

$A^2 = cA$ を利用すれば、

$$\begin{aligned} A^n &= A^2 A^{n-2} \\ &= cA A^{n-2} \\ &= cA^{n-1} \\ &= c^2 A^{n-2} \\ &= c^3 A^{n-3} \\ &= \dots \\ &= c^{n-1} A \\ &= \begin{pmatrix} a(a+b)^{n-1} & -a(a+b)^{n-1} \\ -b(a+b)^{n-1} & b(a+b)^{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \begin{pmatrix} a(a+b)^{n-1} & -a(a+b)^{n-1} \\ -b(a+b)^{n-1} & b(a+b)^{n-1} \end{pmatrix}$$

(3)

問題文の条件より、

$$\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ 0 < a+b=c < 1 \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。したがって $1-c \neq 0$ であるから、

$$\begin{aligned} E + A + A^2 + \dots + A^n &= E + A + cA + \dots + c^{n-1}A \\ &= E + \frac{1-c^n}{1-c}A \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1-(a+b)^n}{1-(a+b)} \begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。したがって

$$p_n = 1 + \frac{a\{1-(a+b)^n\}}{1-(a+b)}$$

である。

$$(答) \quad p_n = 1 + \frac{a\{1-(a+b)^n\}}{1-(a+b)}$$

(4)

$a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{3}$ のとき、 a , b は①を満たすので、

$$\begin{aligned} p_n &= 1 + \frac{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{5}{6} \right)^n \right\}}{1 - \frac{5}{6}} \\ &= 1 + 3 - 3 \left(\frac{5}{6} \right)^n \\ &= 4 - 3 \left(\frac{5}{6} \right)^n \end{aligned}$$

である。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6} \right)^n = 0$ であるから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 4$$

となる。

(答) 4

第2問

問題文の条件より

$$\begin{cases} P(x) = A(x)(x-1) - 3 & \dots \textcircled{1} \\ P(x) = Q(x)(x-2) & \dots \textcircled{2} \\ Q(x) = B(x)(x+3) + 7 & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

とかける。

(1)

①, ②において $x=1$ とすれば

$$\begin{cases} P(1) = -3 \\ P(1) = -Q(1) \end{cases}$$

となる。したがって

$$Q(1) = 3 \quad \dots \textcircled{4}$$

となるから、剰余定理より $Q(x)$ を $x-1$ で割った余りは3である。

(答) 3

(2)

$P(x)$ が x^3 の係数が1の3次式であることより、②から、 $Q(x)$ は x^2 の係数が1の2次式である。したがって

$$Q(x) = x^2 + ax + b \quad (a, b \text{ はともに実数})$$

とかける。また③, ④より、

$$\begin{cases} Q(-3) = 7 \\ Q(1) = 3 \end{cases}$$

となることから、

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 9 - 3a + b = 7 \\ 1 + a + b = 3 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} -3a + b = -2 \\ a + b = 2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

である。したがって $Q(x) = x^2 + x + 1$ である。

(答) $Q(x) = x^2 + x + 1$

(3)

$P(x)$ は x^3 の係数が1の3次式であるから、

$$P(x) = (x+c)(x-1)(x+3) + dx + e \quad \dots \textcircled{5}$$

とおける(c, d, e は実数)。③より $Q(-3) = 7$ であるから、これと②より、

$$P(-3) = -35$$

である。また①より $P(1) = -3$ であるから、これらを⑤に代入して、

$$\begin{aligned} & \begin{cases} d + e = -3 \\ -3d + e = -35 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} d = 8 \\ e = -11 \end{cases} \end{aligned}$$

となる。よって⑤は

$$P(x) = (x+c)(x-1)(x+3) + 8x - 11$$

となる。②より $P(2) = 0$ であるから、

$$\begin{aligned} 0 &= (2+c) \cdot 1 \cdot 5 + 16 - 11 \\ &\Leftrightarrow c = -3 \end{aligned}$$

となる。以上より、 $P(x)$ を $(x-1)(x+3)$ で割ったときの商は $x-3$ 、余りは $8x-11$ である。

(答) 商: $x-3$, 余り: $8x-11$

第3問

(1)

$\overrightarrow{AP} = s\vec{u}$, $\overrightarrow{BQ} = t\vec{v}$ であるから,

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3s-4 \\ 8 \\ s+2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BQ} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t+10 \\ 3t+3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OP} = (3s-4, 8, s+2), \quad \overrightarrow{OQ} = (-t+10, 3t+3, -4)$$

(2)

点Pは直線 l 上を, 点Qは直線 m 上を, それぞれ任意に動くことができる。したがって, 2直線 l と m が共有点を持たないということは, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ}$ となるような s, t が存在しないということである。ここで, (1)より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OQ} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3s-4 = -t+10 \\ 8 = 3t+3 \\ s+2 = -4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3s+t = 14 \\ t = \frac{5}{3} \\ s = -6 \end{cases} \end{aligned}$$

となるが, $t = \frac{5}{3}$ と $s = -6$ を $3s+t=14$ に代入すると, $-18+\frac{5}{3}=14$ となり成り立たない。つまり $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ}$ となるような s, t が存在しない。以上より l と m が共有点を持たないことが示された。

(証明終)

(3)

(2)より $|\overrightarrow{PQ}| \neq 0$ であるから, $\overrightarrow{PQ}$ が $\vec{u}$ と $\vec{v}$ の両方に垂直であることは

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u} = 0 \text{ かつ } \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v} = 0$$

であることと同値である。いま,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \\ &= t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - s \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \begin{cases} \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u} = 0 \\ \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -3t-10s+42-6=0 \\ 10t-(-3)s-14-15=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 10s+3t=36 \\ 3s+10t=29 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} s=3 \\ t=2 \end{cases} \end{aligned}$$

となる。これより,

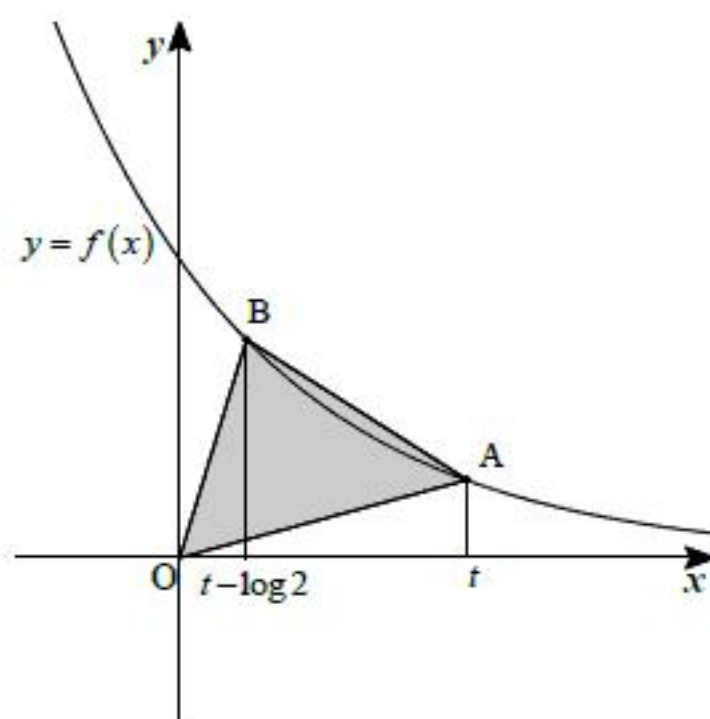
$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}$$

となるから, 点Pと点Qの座標はそれぞれ $P(5, 8, 5)$, $Q(8, 9, -4)$ である。

$$(\text{答}) \quad P(5, 8, 5), \quad Q(8, 9, -4)$$

第4問

(1)



曲線 $y = f(x) = e^{-x}$ ，点A，点Bの位置関係は上図のようになる。このとき，斜線部の面積が S である。 $t = 0$ のとき， $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ， $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -\log 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ であるから，

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \Delta(\overrightarrow{OA} \quad \overrightarrow{OB}) \\ &= \frac{1}{2} \Delta \begin{pmatrix} 0 & -\log 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \log 2 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{1}{2} \log 2$

(2)

$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$ ， $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} t - \log 2 \\ e^{-t + \log 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - \log 2 \\ 2e^{-t} \end{pmatrix}$ であるから，

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \Delta(\overrightarrow{OA} \quad \overrightarrow{OB}) \\ &= \frac{1}{2} \Delta \begin{pmatrix} t & t - \log 2 \\ e^{-t} & 2e^{-t} \end{pmatrix} \\ &= \frac{t + \log 2}{2} e^{-t} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{t + \log 2}{2} e^{-t}$

(3)

(2)で求めた S を $S(t)$ と表すことにする。この関数を t について微分すると，

$$\begin{aligned} S'(t) &= \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{t + \log 2}{2} e^{-t} \\ &= \frac{1 - \log 2 - t}{2} e^{-t} \end{aligned}$$

となるから，次の増減表を得る。

t	0	...	$1 - \log 2$	...
$S'(t)$	+	+	0	-
$S(t)$		↗	$S(1 - \log 2)$	↘

これより S の最大値は $S(1 - \log 2)$ であるから，求める最大値は

$$\begin{aligned} S(1 - \log 2) &= \frac{1 - \log 2 + \log 2}{2} e^{-(1 - \log 2)} \\ &= e^{-1} \\ &= \frac{1}{e} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{1}{e}$